

Die Massen der leichten Nuklide

Ein Ausgleich aus kernphysikalischen Daten

Von J. MATTAUCh, L. WALDMANN, R. BIERI * und F. EVERLING

Aus dem Max-Planck-Institut für Chemie, Mainz

(Z. Naturforschg. 11 a, 525—548 [1956]; eingegangen am 25. April 1956)

Das sehr umfangreiche Material von Reaktionsenergien kernphysikalischer Umwandlungen und von β -Zerfallsenergien wird auf Widerspruchsfreiheit untersucht und sodann einer Ausgleichsrechnung unterworfen, um die Massen von 70 Nukliden bis ^{36}Cl zu erhalten. Die Rechnung erfordert u. a. die Auflösung eines Systems von 70 linearen Gleichungen mit 70 Unbekannten. Die noch vorhandenen Diskrepanzen mit neueren massenspektrographischen Bestimmungen werden diskutiert.

Man interessiert sich für die Massen von Nukliden und ihre Fehler hauptsächlich aus zwei Gründen:

1. Das System der Massen stellt einen kurz gefaßten Ausdruck des experimentellen Materials dar, aus dem sie berechnet werden.

2. Aus den Massen können in einfacher Weise eine Reihe von Bindungsenergien berechnet werden, die von kernphysikalischem Interesse sind; z. B. die Bindungsenergien $E(N, Z)$, die Anlagerungsenergien des jeweils letzten Nukleons oder Nukleonpaars sowie die Energiedifferenzen von zwei benachbarten Isobaren, die ungefähr den ersten Ableitungen der Energiefläche $E = E(N, Z)$ in Richtung von N und Z sowie von A entsprechen, die Paarungsenergien, die als zweite Ableitungen von E nach N bzw. Z aufgefaßt werden können u. a. m.

Die für die Massenberechnung in Betracht kommenden experimentellen Werte, die wir auch kurz als Q -Werte bezeichnen wollen, wurden in muster-gültiger Weise in einer Reihe von Berichten zusammengestellt **. Für die Berechnung der Massen der leichten Nuklide kommen die Daten in Frage, die in den Berichten von VAN PATTER und WHALING¹ über die bei Kernreaktionen freiwerdenden Energien, von KING² über totale β -Zerfallsenergien und von DUCKWORTH und Mitarb.³ über massenspektrographische Dublettewerte gesammelt worden sind. Auf

diese Berichte werden wir uns im folgenden mit I, II und III beziehen.

Der Zusammenhang zwischen den experimentellen Daten (Q -Werten) und den Massen bzw. den Bindungsenergien wird im nächsten Abschnitt näher besprochen werden. Im Gebiet der leichten Nuklide ist nun die Zahl N der Q -Werte sehr viel größer als die Zahl n der daraus zu berechnenden Massen M . Mit anderen Worten das Problem ist stark überbestimmt und somit eine typische Aufgabe der Ausgleichsrechnung, ähnlich der Berechnung der atomaren Konstanten, wie sie seit 1929 insbesondere von R. T. BIRGE, von DuMond u. a. von Zeit zu Zeit in vorbildlichen Arbeiten⁴ durchgeführt wurde. Die für unsere Zwecke benötigten Formeln aus der Ausgleichsrechnung sind im Abschnitt 3 zusammengestellt. Der erste umfangreichere Ausgleich dieser Art wurde unseres Wissens von den beiden Senior-Autoren für die Massenangaben des Isotopenberichtes 1949 durchgeführt⁵. Unter späteren ähnlichen Ausgleichsrechnungen mit neueren Daten erwähnen wir besonders die Arbeiten von LI, WHALING, FOWLER und LAURITSEN⁶, von DRUMMOND⁷ und von WAPSTRA⁸. Zwischen den N vorgegebenen Q -Werten, die zur Berechnung von n Massen dienen sollen, müssen $N - n = r$ voneinander linear unabhängige Nebenbedingungen (Zyklen) erfüllt sein. Die Aufstellung und Diskussion dieser Bedingungen, die in Abschnitt 3 erfolgt, ermöglicht, wie in Abschnitt 4 ge-

* jetzt am Physics Department, University of Minnesota, Minneapolis, Minn.

** Siehe Oktober-Ausgabe, Rev. Mod. Phys. 1954.

¹ D. M. VAN PATTER u. WARD WHALING, Rev. Mod. Phys. **26**, 402 [1954].

² R. W. KING, Rev. Mod. Phys. **26**, 327 [1954].

³ H. E. DUCKWORTH, B. G. HOGG u. E. M. PENNINGTON, Rev. Mod. Phys. **26**, 463 [1954].

⁴ Siehe J. W. M. DuMond u. E. R. COHEN, Rev. Mod. Phys. **25**, 691 [1953].

⁵ J. MATTAUCh u. A. FLAMMERSFELD, Isotopenbericht, Verlag der Z. Naturforschg., Tübingen, 1949. — L. WALDMANN, Z. Naturforschg. **4 a**, 226 [1949].

⁶ C. W. LI, WARD WHALING, W. A. FOWLER u. C. C. LAURITSEN, Phys. Rev. **83**, 512 [1951]. — C. W. LI, Phys. Rev. **88**, 1038 [1952].

⁷ J. E. DRUMMOND, Phys. Rev. **97**, 1004 [1955]; **99**, 709 [1955].

⁸ A. H. WAPSTRA, Physica **21**, 367 [1955].



zeigt wird, bereits vor der Durchführung der Ausgleichsrechnung die Ausscheidung von Beobachtungswerten, die mit dem Gros der übrigen im Widerspruch stehen und deren Zulassung daher die ausgeglichenen Werte fälschen würde. Sie stellt weiterhin eine wertvolle erste Annäherung an die Ausgleichsrechnung dar.

1. Zusammenhang zwischen den Q -Werten und den Massen bzw. den Bindungsenergien

Der Zusammenhang zwischen der Masse M des aus N Neutronen, Z Protonen und Z Elektronen aufgebauten Atoms und der Bindungsenergie E lautet bekanntlich

$$M = N \cdot {}^1n + Z \cdot {}^1H - E. \quad (1)$$

Dabei bedeuten M , 1n und 1H zunächst die totalen Ruhmassen des betreffenden Atoms. Gl. (1) bleibt aber offenbar ungeändert, wenn man unter M usw. die Massenüberschüsse $M = M_{\text{total}} - (N+Z) \cdot \frac{1}{16} {}^{16}\text{O}$ usw. versteht, welche mittels der durch Konvention festgelegten Masseneinheit ($1 \text{ ME} = \frac{1}{16} \cdot {}^{16}\text{O}$) definiert sind. Im folgenden sind stets diese Massenüberschüsse gemeint, wenn von Massen schlechthin die Rede ist. Sie können nach Belieben in Masseneinheiten (praktisch meist mME) oder in Energieeinheiten (MeV) angegeben werden, was auch schon in der Schreibweise von Gl. (1) zum Ausdruck gebracht ist durch Fortlassen des Faktors c^2 . Mit den totalen Massen zu rechnen, ist für die Zwecke der Kernphysik unnötig und wäre besonders bei Verwendung von Energieeinheiten sehr unbequem.

Für unsere Zwecke benutzen wir statt N und Z zur Charakterisierung eines Nuklides lieber die Massen- oder Nukleonenzahl $A = N + Z$ und den Neutronenüberschuß $I = N - Z = 2 T_z$ (T_z = Isotopenspin). D. h. es wird $N = \frac{1}{2} A + T_z$, $Z = \frac{1}{2} A - T_z$ und

$$M(A, T_z) = \frac{1}{2} A ({}^1n + {}^1H) + T_z ({}^1n - {}^1H) - E. \quad (2)$$

Die zur Berechnung der Massen zur Verfügung stehenden experimentellen Daten und ebenso die daraus zu berechnenden Bindungsenergien und sonstigen interessierenden Größen sind nun stets sehr einfache Linearkombinationen einiger weniger Massen, die die Eigenschaft haben, daß sich die Massenzahlen herausheben. Die Massen sind darin mit einfachen, ganzen oder gebrochenen Zahlen α multipliziert, die wir in Analogie zu den chemischen Reaktionen als „stöchiometrische Koeffizienten“ bezeich-

nen wollen. Eine solche Linearkombination wollen wir einen Q -Wert nennen. Es ist also

$$\sum_i \alpha_i M_i = Q, \text{ wenn } \sum_i \alpha_i A_i = 0. \quad (3)$$

Bei den experimentell gemessenen Q -Werten, die zur Berechnung der Massen herangezogen werden, unterscheidet man drei Arten:

1. Die bei Kernreaktionen frei werdenden Energien Q_r

Z. B. ist die bei der Reaktion ${}^{14}\text{N}(\alpha, p) {}^{17}\text{O}$ frei werdende Energie $Q_r = {}^{14}\text{N} + {}^4\text{He} - {}^1\text{H} - {}^{17}\text{O}$. Es sind gewöhnlich vier und bei den Photoprozessen drei stöchiometrische Koeffizienten α_i von 0 verschieden und diese sind meist +1 oder -1. Eine der wenigen Ausnahmen ist die Reaktion ${}^6\text{Li}(d, \alpha) {}^4\text{He}$, bei der $Q_r = {}^6\text{Li} + {}^2\text{D} - 2 \cdot {}^4\text{He}$. Da bei Kernreaktionen keine Umwandlung von Neutronen in Protonen oder umgekehrt stattfindet, sich somit T_z insgesamt nicht ändert, ist immer, wie aus den Gln. (2) und (3) folgt,

$$Q_r = - \sum_i \alpha_i E_i, \text{ da } \sum_i \alpha_i T_z i = \Delta T_z = 0. \quad (4)$$

Aus Q_r -Werten lassen sich also die Bindungsenergien sämtlicher, durch Kernreaktionen erfaßten Atomkerne berechnen. Schon der Q_r -Wert der einfachsten Reaktion – der Einfangung eines Neutrons durch ein Proton – liefert die Bindungsenergie des Deuterons: ${}^1\text{H}(n, \gamma) {}^2\text{D} = E_d$. Dieser und die Q_r -Werte der (n, γ) , (p, γ) und (d, γ) Reaktionen mit ${}^2\text{D}$ als Target ergeben sofort die Bindungsenergien E_t , E_p und E_d der anderen als Geschoßpartikel verwendeten Teilchen usf.

Die für die Massenberechnung notwendige Festlegung eines Standards, und zwar ${}^{16}\text{O} = 0$, heißt nach Gl. (2), daß

$$({}^1n + {}^1H) = \frac{1}{8} E({}^{16}\text{O}). \quad (5)$$

Da Q_r -Werte keine Information über $({}^1n - {}^1H)$ liefern, lassen sich aus ihnen allein nur die Massen der Hauptreihe (als solche wollen wir die Kerne mit $T_z = 0$ bezeichnen) berechnen:

$$M(A, T_z = 0) = \frac{A}{16} E({}^{16}\text{O}) - E(M). \quad (6)$$

Ganz allgemein kann man sagen, daß sich aus Q_r -Werten nur die Massen solcher Nuklide berechnen lassen, die im $A - T_z$ -Diagramm mit dem Standard auf einer Geraden durch den Ursprung liegen.

2. Totale β -Zerfallsenergien Q_β

Hier reduziert sich die Linearkombination auf eine Differenz zwischen der Masse des Anfangs- und des Endkernes. Unter Q_{β^+} ist bereits wie üblich die um $2m_0$ vermehrte Zerfallsenergie verstanden. Es ist also

$$Q_{\beta^\pm} = M_a - M_e = \mp ({}^1n - {}^1H) - (E_a - E_e), \\ \text{da } \Delta T_\zeta = \mp 1 \text{ für } \beta^\pm\text{-Zerfall.} \quad (7)$$

Aus Q_β -Werten allein ergeben sich natürlich nur die Massen von Nukliden, die mit dem Standard isobar sind. Sie enthalten aber die wichtige Neutron-Proton-Differenz (${}^1n - {}^1H$) und im Verein mit den Q_r -Werten lassen sich nun nach den Gln. (2) und (4) alle Massen berechnen.

Das eben Gesagte gilt allerdings nur unter der bei solchen Massenberechnungen stets gemachten Annahme, daß die Ruhmasse m_ν des Neutrinos verschwindet. Diese Annahme stützt sich auf die Ausmessung von β -Spektren in der Nähe der Grenzenergie unter Zugrundelegung der FERMISCHEN Theorie des β -Zerfalls oder einer ihrer Varianten⁹. Wäre $m_\nu \neq 0$, dann wäre es noch zur linken Seite von Gl. (7) zu addieren. Im Prinzip geben somit Q_β -Werte von β^+ - und von β^- -Zerfällen die Möglichkeit, neben (${}^1n - {}^1H$) auch m_ν zu berechnen, da

$$({}^1n - {}^1H) + m_\nu = -Q_{\beta^+} - (E_a - E_e), \\ ({}^1n - {}^1H) - m_\nu = Q_{\beta^-} + (E_a - E_e). \quad (8)$$

Da aber die am genauesten gemessenen β^+ -Zerfallsenergien mit Fehlern von bestenfalls ± 5 keV angegeben werden, wozu noch die Fehler der zugehörigen Bindungsenergien kommen, hätte das Resultat wenig Sinn, da man weiß, daß die Neutrinomasse bestimmt kleiner als 5 keV ist. zieht man zur Berechnung von Massen neben Q_r -Werten nur Q_{β^-} -Werte heran oder gehen die Q_{β^-} -Werte gegenüber den Q_{β^+} -Werten mit überragendem Gewicht ein, wie dies bei unserer Ausgleichsrechnung der Fall ist, dann wären, wie aus Gl. (2) und der zweiten Gl. (8) folgt, alle Massen um $T_\zeta m_\nu$ zu erhöhen, wenn nachträglich durch andere Experimente ein von Null verschiedener Wert von m_ν festgestellt würde.

3. Massenspektrographische Dublettewerte Q_m

Für diese gilt:

$$Q_m = ({}^1n - {}^1H) \Delta T_\zeta - \sum_i \varkappa_i E_i, \quad (9)$$

wobei ΔT_ζ verschiedene Werte annehmen kann. Aus ihnen allein ergeben sich zwar die Massen der sta-

bilen und, soweit sie in einer für die Messung ausreichenden Menge erlangbar sind, auch der instabilen Nuklide mit Ausnahme von 1n . Daher können aus Q_m -Werten keine Bindungsenergien E berechnet werden. Erst durch Heranziehung mindestens eines oder mehrerer Q_r -Werte, die die in Gl. (9) auftretende $\sum_i \varkappa_i E_i$ liefern, können $({}^1n - {}^1H)$ und damit auch die Bindungsenergien der Kerne berechnet werden. Z. B. ist $({}^1n - {}^1H) = E_d - ({}^1H_2 - {}^2D)$. Im Verein mit einem sehr genau bestimmten Q_β -Wert, z. B. ${}^3T(\beta^-){}^3He$ ergäbe der zugehörige Q_m -Wert $({}^3T - {}^3He)$ auch die Masse des Neutrinos oder eine obere Grenze dafür.

Aus den durch den Ausgleich gewonnenen Massen berechnen sich dann die Bindungsenergien der Kerne gegenüber den Nukleonen durch Auflösung der Gl. (1) oder (2) nach E sowie die übrigen in der Einleitung genannten Bindungsenergien, die alle Linearkombinationen der Massen, also Q -Werte im Sinne von Gl. (3) darstellen.

2. Allgemeines zur Ausgleichsrechnung¹⁰

Gegeben seien N experimentell gemessene Werte mit ihren Fehlern ($Q_I \pm q_I$, $I = 1, 2, \dots, N$), aus denen $n < N$ Massen (M_i , $i = 1, 2, \dots, n$) mit ihren Fehlern zu berechnen sind. Die Aufstellung ausgeglichenener Werte $Q_I^* \pm q_I^*$ hat so zu erfolgen, daß Widersprüche verschwinden, d. h. daß jede Rechenmöglichkeit zu denselben ausgeglichenen Massenüberschüssen $M_i^* \pm m_i^*$ führt und dabei die Verbesserung $v_I = Q_I - Q_I^*$ absolut um so kleiner ausfällt, je genauer Q_I gemessen, d. h. je kleiner der Fehler q_I ist. Dies wird nach GAUSS am besten durch die Forderung erfüllt:

$$\sum_I p_I v_I^2 = C \sum_I (Q_I - Q_I^*)^2 q_I^{-2} = \text{Minimum.} \quad (10)$$

Hier sind noch für jeden Meßwert die Gewichte $p_I = C q_I^{-2}$ eingeführt *.

⁹ D. R. HAMILTON, W. P. ALFORD u. L. GROSS, Phys. Rev. **92**, 1521 [1953].

¹⁰ Vergl. F. R. HELMERT, Ausgleichsrechnung, 3. Aufl., Leipzig 1924.

* In dem einfachen Falle, daß die Q_I Beobachtungen ein und derselben Größe darstellen, ergibt die GAUSSSCHE Forderung (10) als ausgeglichenen oder plausibelsten Wert Q^* das gewichtete bzw. das arithmetische Mittel, je nachdem ob die Gewichte p_I der verschiedenen Beobachtungswerte Q_I voneinander verschieden oder einander alle gleich sind. Das ist wohl für Physiker einer der Gründe, die GAUSSSCHE Methode der kleinsten Quadrate allen anderen vorgeschlagenen Methoden vorzuziehen.

a) Die Methode der vermittelnden Beobachtungen

Von vermittelnden Beobachtungen spricht man immer dann, wenn die zu bestimmenden Größen (hier die Massen) der unmittelbaren Messung nicht zugänglich sind, wenn sie vielmehr aus anderen meßbaren Größen (hier den Q -Werten) errechnet werden müssen. Wir haben also nach Gl. (3) N Gleichungen

$$Q_I^* = \sum_k \alpha_{li} M_i^* \quad (i=1, 2, \dots, n; I=1, 2, \dots, N), \quad (11)$$

wo die α_{li} bekannte Koeffizienten (die „stöchiometrischen Koeffizienten“ der Kernreaktionen) sind. Ein Näherungswert $M_i^{(0)}$ für jede Masse wird als bekannt vorausgesetzt. Mittels der Abkürzung

$$Q_I^{(0)} = \sum_i \alpha_{li} M_i^{(0)} \quad (12)$$

schreiben sich die Gln. (11) auch

$$Q_I^{(0)} - Q_I^* = \sum_i \alpha_{li} (M_i^{(0)} - M_i^*). \quad (11a)$$

Die GAUSSSche Forderung (10) führt dann bekanntlich auf die n linearen Normalgleichungen

$$\sum_k a_{ik} (M_k^{(0)} - M_k^*) = \lambda_i, \quad (13)$$

wobei zur Abkürzung

$$a_{ik} = \sum_l \alpha_{li} \alpha_{lk} q_I^{-2}, \quad \lambda_i = \sum_l \alpha_{li} (Q_I^{(0)} - Q_I) q_I^{-2} \quad (14)$$

gesetzt ist. Aus Gl. (13) sind die M_i^* zu berechnen. Bezeichnet (a_{ik}^{-1}) die zur Matrix (a_{ik}) inverse Matrix, so wird nach Gl. (13)

$$M_i^* = M_i^{(0)} - \sum_k a_{ik}^{-1} \cdot \lambda_i. \quad (15)$$

Durch Einsetzen der gefundenen M_i^* in Gl. (11) oder (11a) ergeben sich sodann auch die ausgeglichenen Werte Q_I^* der für den Ausgleich verwendeten Beobachtungsdaten. — Die Matrix (a_{ik}) ist positiv-definit, da sie ja einer Summe von Quadraten, vgl. Gl. (10), entstammt. Insbesondere ist daher $a_{ii} > 0$, was man auch direkt aus Gl. (14) sieht.

Die Matrix (a_{ik}^{-1}) gestattet aber zugleich auch die Angabe des ausgeglichenen Fehlers q^* irgendeiner linearen Funktion

$$Q^* = \sum_i \alpha_i M_i^* \quad (16)$$

der Massen. Ersetzt man hierin M_i^* gemäß Gl. (15) und (14) durch die Q_I und wendet dann das GAUSSche Fehlerfortpflanzungsgesetz an, so findet man

$$q^{*2} = \sum_I \left(\sum_{i,k} \alpha_i a_{ik}^{-1} \alpha_{lk} q_I^{-2} \right)^2 q_I^2 = \sum_{i,k} a_{ik}^{-1} \alpha_i \alpha_k. \quad (17)$$

Speziell ist also der ausgeglichene Fehler der Massen M_i^* gegeben durch

$$m_i^{*2} = a_{ii}^{-1}. \quad (18)$$

Ebenso wie (a_{ik}) ist auch (a_{ik}^{-1}) positiv-definit; das muß so sein, denn jedes q^{*2} , berechnet nach Gl. (17), muß positiv sein. An Stelle von (a_{ki}^{-1}) kann man auch die dimensionslose Korrelationsmatrix der

$$c_{ik} = a_{ik}^{-1} / (a_{ii}^{-1} a_{kk}^{-1})^{1/2}, \quad c_{ii} = 1 \quad (19)$$

benutzen und hat dann statt Gl. (17)

$$q^{*2} = \sum_{i,k} c_{ik} \alpha_i \alpha_k m_i^* m_k^*. \quad (20)$$

Eine Bemerkung ist noch zu machen über die Näherungswerte $M_i^{(0)}$. Wir denken uns die Meßwerte Q_I nach wachsenden Fehlern q_I geordnet und wählen von den Gln. (11) in dieser Reihenfolge genau n linear unabhängige Gleichungen aus, die dann die eindeutige Berechnung der Massen aus den Q -Werten erlauben. Diese Massen können dann als Näherungswerte $M_i^{(0)}$ verwendet werden. Durch diese Wahl wird erreicht, daß man bei der schließlichen Berechnung der M_i^* mit möglichst geringer Genauigkeit der a_{ik}^{-1} auskommt, da dann die λ_i gemäß Gl. (14) verhältnismäßig klein ausfallen.

b) Die Methode der bedingten Beobachtungen

Zum besseren Verständnis des im folgenden Abschnitt Gesagten soll hier kurz auch diese zweite Methode der Ausgleichsrechnung gestreift werden. Anstatt sofort die M_i^* zu berechnen, kann man auch zunächst nur die Q_I ausgleichen, ausgehend von der Bemerkung, daß zwischen diesen r linear unabhängige Bedingungen

$$\sum_{\varrho} \alpha_{\varrho I} Q_I^* = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \dots, r; r = N - n) \quad (21)$$

bestehen müssen, welche sich aus den Gln. (11) durch Elimination der M_i^* ergeben. Die experimentellen Werte Q_I werden die Gln. (21) nicht genau erfüllen, sondern die Residuen ε_{ϱ} ergeben:

$$\sum_I \alpha_{\varrho I} Q_I = \varepsilon_{\varrho}. \quad (22)$$

Der GAUSSSchen Forderung (10) und den Bedingungen (21) ist genügt durch

$$Q_I^* = Q_I - q_I^2 \sum_{\varrho} k_{\varrho} \alpha_{\varrho I}, \quad (23)$$

wobei sich die LAGRANGESchen Parameter („Korrelaten“) k_{ϱ} aus

$$\sum_{\sigma} b_{\varrho\sigma} k_{\sigma} = \varepsilon_{\varrho} \quad \text{oder} \quad k_{\varrho} = \sum_{\sigma} b_{\varrho\sigma}^{-1} \varepsilon_{\sigma} \quad (24)$$

ergeben. Hier ist zur Abkürzung

$$b_{\varrho\sigma} = \sum_I \alpha_{\varrho I} \alpha_{\sigma I} q I^2 \quad (25)$$

gesetzt worden; $(b_{\varrho\sigma}^{-1})$ bezeichnet die zu $(b_{\varrho\sigma})$ inverse Matrix. Die Ausgleichsrechnung gestaltet sich nach dieser Methode jedoch nur dann einfacher als nach Methode a), wenn viele Q_I vorliegen, zwischen denen aber nur wenige Bedingungen bestehen ($r \ll n$), weshalb wir diese Methode hier nicht weiter verfolgen.

Abschließend sei noch erwähnt, daß, GAUSSSCHE Verteilung der wahren Fehler der Q_I vorausgesetzt, für den Wert des Minimums aus (10) gelten soll:

$$\sum_I p_I v_I^2 = (N - n) C = r C. \quad (26)$$

Denn es ist der Fehler der Gewichtseinheit *vor* dem Ausgleich R_i bzw. *nach* dem Ausgleich R_e gegeben durch¹¹

$$R_i^2 = C / \sum_I p_I \text{ und } R_e^2 = \sum_I p_I v_I^2 / r \sum_I p_I, \quad (27)$$

und der Erwartungswert für das Verhältnis beider Fehler beträgt für den Fall, daß unter den q_i die mittleren (und nicht etwa die wahrscheinlichen) Fehler gemeint sind:

$$R_e/R_i = \left[\sum_I p_I v_I^2 r C \right]^{1/2} = 1 ; \quad (28)$$

er ist mit einem relativen Fehler $\pm (1/2r)^{1/2}$ behaftet. Wären die q_I die wahrscheinlichen Fehler der Q_I ,

wie in der amerikanischen Literatur vielfach angegeben wird, so hätte an Stelle von Gl. (28) zu treten

$$R_e/R_i = 0,6745 \cdot \left[\sum_I p_I v_I^2 / r C \right]^{1/2} = 1. \quad (28 \text{ a})$$

Diese Beziehungen ermöglichen nach Durchführung des Ausgleichs eine Prüfung, ob die Fehler q_I richtig angenommen waren.

Analog kann jede der Bedingungen (22) einzeln durch ihr Verhältnis $l_\varrho = R_e / R_i$ überprüft werden. Denn wenn nur eine — die ϱ -te — Bedingung vorhanden wäre, so erhält man, da $r = 1$,

$$l_\varrho = \left[\sum_I p_I v_I^2 / C \right]^{1/2} = \left[\sum_I v_I^2 q_I^{-2} \right]^{1/2} = \varepsilon_\varrho / \sqrt{b_{\varrho\varrho}}, \quad (29)$$

wo nach Gln. (23), (24) und (25), spezialisiert für nur eine, die ϱ -te Bedingung, die Werte von

$$v_I = Q_I - Q_I^* = q_I^2 a_{\varrho I} \varepsilon_\varrho / b_{\varrho\varrho} \quad \text{und} \quad \sum_I a_{\varrho I}^2 q_I^2 b_{\varrho\varrho} \quad (30)$$

eingesetzt sind.

3. Die Aufstellung des Systems der Reaktionszyklen

Die im nächsten Abschnitt vorzunehmende Sichtung der Q -Werte, die als Eingangswerte für den Ausgleich aufgenommen werden sollen, erfolgt am besten durch Aufstellung der r Bedingungen (22)

und die Beantwortung der Frage nach dem maximalen l_ϱ -Wert, der noch zugelassen werden soll. Die Bedingungen (22) kann man auf folgende drei Arbeiten leicht gewinnen:

1. Umfährt man in Abb. 1 einen geschlossenen Polygonzug und addiert die Q_r - und Q_β -Werte der aufeinanderfolgenden Reaktionen und β -Zerfälle mit dem richtigen Vorzeichen (positiv beim Fortschreiten in Richtung des Pfeiles und negativ beim Fortschreiten in entgegengesetzter Richtung), so heben sich die Bindungsenergien der die Ecken des Polygons bildenden Atomkerne auf; führt man als Hilfsgrößen bei den Kernreaktionen die Bindungsenergien der Geschoßteilchen bzw. den β -Zer-

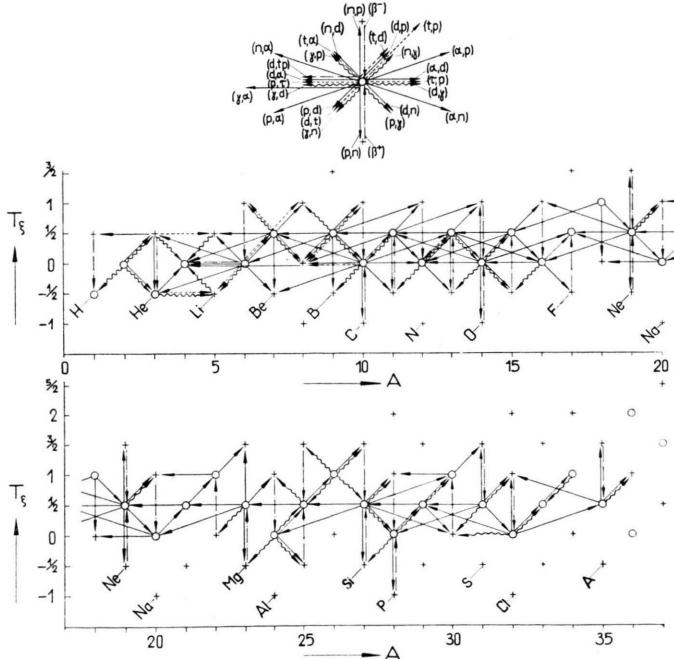


Abb. 1. $A - T_\zeta$ -Diagramm von ($n=70$) Nukliden mit ($N=196$) verbindenden Kernreaktionen und β -Zerfällen.

fällen die Neutron-Proton-Differenz ein und fügt sie der obigen Summe mit dem richtigen durch die Gl. (4) bzw. (7) gegebenen Vorzeichen hinzu, dann erhält man jeweils eine Linearkombination der Bedingungen (22). Tab. 1 gibt eine Reihe von Beispielen solcher unter der Bezeichnung Zyklen bekannten Bedingungen. Die Prozesse bezeichnen dabei in einfach verständlicher Weise die aus Tab. 3 hier einzusetzenden Werte Q_I ; hinzu kommen noch die in Tab. 2 zusammengestellten Hilfsgrößen. Auf letztere sowie auf das bei der Aufstellung der Zyklen an-

gewandte Verfahren kommen wir später noch ausführlich zurück. Hier bemerken wir noch, daß die Koeffizienten $\alpha_{\varrho I}$ außer für die Hilfsgrößen stets +1 oder -1 sind.

2. Auch aus Q_m -Werten kann man leicht ähnliche Zyklen bilden, wenn die Anzahl der gemessenen Q_m -Werte die Zahl der in ihnen auftretenden Massen übertrifft. Hilfsgrößen treten hier nicht auf, doch sind die $\alpha_{\varrho I}$ oft verschieden von ± 1 .

3. Schließlich ergibt jeder Streckenzug in Abb. 1, der zwei massenspektrographisch bestimmte Nuklide

Nr. d. Nebenbed. ϱ alt	neu	Zur Aufstellung der Nebenbedingungen	$\varrho \pm \sqrt{b_{\varrho\varrho}}$ MeV	t_{ϱ}
a	(53)	$^{12}\text{C}(\text{d}, \text{n})_3^{13}\text{N} - ^{13}\text{C}(\text{p}, \text{n})_3^{13}\text{N} - ^{12}\text{C}(\text{d}, \text{p})_3^{13}\text{C}$	$\pm 0,000 \pm 0,005$	$\pm 0,00$
b	(54)	$^{13}\text{C}(\text{p}, \gamma)_0^{14}\text{N} - ^{14}\text{C}(\beta^-)_1^{14}\text{N} - ^{12}\text{C}(\text{d}, \text{p})_4^{14}\text{C}$	$+(^1\text{n}-^1\text{H})-E_{\text{d}}$	$+0,078 \pm 0,080$
c		$^{13}\text{C}(\text{a}, \text{n})_{160}^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}(\text{d}, \text{a})_{2,5}^{14}\text{N} - ^{13}\text{C}(\text{p}, \gamma)_0^{14}\text{N}$	$+E_{\text{d}}$	$-0,058 \pm 0,179$
d		$^{14}\text{N}(\gamma, \text{n})_{200}^{13}\text{N} - ^{12}\text{C}(\text{d}, \text{n})_3^{13}\text{N} - ^{14}\text{N}(\text{d}, \text{a})^{12}\text{C}$	$+(E_{\text{a}}-2E_{\text{d}})$	$+0,030 \pm 0,215$
e	(65)	$^{14}\text{N}(\text{d}, \text{a})^{12}\text{C} - ^{15}\text{N}(\text{p}, \text{a})^{12}\text{C} - ^{14}\text{N}(\text{d}, \text{p})^{15}\text{N}$		$-0,185 \pm 0,080$
f		$^{14}\text{N}(\gamma, \text{n})_{200}^{13}\text{N} - ^{12}\text{C}(\text{p}, \text{n})_3^{13}\text{N} + ^{13}\text{C}(\text{p}, \gamma)_0^{14}\text{N}$		$-0,077 \pm 0,215$
b+c	(57)	$^{12}\text{C}(\text{a}, \text{n})_{160}^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}(\text{d}, \text{a})_{2,5}^{14}\text{N} - ^{14}\text{C}(\beta^-)_1^{14}\text{N} - ^{12}\text{C}(\text{d}, \text{p})^{14}\text{C}$	$+(^1\text{n}-^1\text{H})$	$+0,020 \pm 0,160$
f-b	(59)	$^{14}\text{N}(\gamma, \text{n})_{200}^{13}\text{N} - ^{12}\text{C}(\text{p}, \text{n})_3^{13}\text{N} + ^{13}\text{C}(\text{d}, \text{p})^{14}\text{C} + ^{14}\text{C}(\beta^-)^{14}\text{N}$	$-(^1\text{n}-^1\text{H})+E_{\text{d}}$	$-0,155 \pm 0,200$
f-b-d		$^{14}\text{N}(\text{d}, \text{a})^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}(\text{d}, \text{n})_3^{13}\text{N} - ^{13}\text{C}(\text{p}, \text{n})_3^{13}\text{N} + ^{13}\text{C}(\text{d}, \text{p})^{14}\text{C} + ^{14}\text{C}(\beta^-)^{14}\text{N}$	$-[(^1\text{n}-^1\text{H})+(E_{\text{a}}-3E_{\text{d}})]$	$-0,185 \pm 0,081$
f-b-d-a		$^{14}\text{N}(\text{d}, \text{p})^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}(\text{d}, \text{p})^{13}\text{C} + ^{13}\text{C}(\text{d}, \text{p})^{14}\text{C} + ^{14}\text{C}(\beta^-)^{14}\text{N}$	$-[(^1\text{n}-^1\text{H})+(E_{\text{a}}-3E_{\text{d}})]$	$-0,185 \pm 0,081$
f-b-d-a-e	(X)	$^{14}\text{N}(\text{d}, \text{p})^{15}\text{N} + ^{15}\text{N}(\text{p}, \text{a})^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}(\text{d}, \text{p})^{13}\text{C} + ^{13}\text{C}(\text{d}, \text{p})^{14}\text{C} + ^{14}\text{C}(\beta^-)^{14}\text{N}$	$-[(^1\text{n}-^1\text{H})+(E_{\text{a}}-3E_{\text{d}})]$	
g	(97)	$^{26}\text{Mg}(\text{p}, \gamma)_0^{27}\text{Al} - ^{27}\text{Mg}(\beta^-)_7^{27}\text{Al} - ^{26}\text{Mg}(\text{d}, \text{p})_6^{27}\text{Mg}$	$+(^1\text{n}-^1\text{H})-E_{\text{d}}$	$+0,157 \pm 0,300$
h		$^{26}\text{Mg}(\text{p}, \gamma)_0^{27}\text{Al} - ^{26}\text{Mg}(\text{d}, \text{n})_5^{27}\text{Al}$	$-E_{\text{d}}$	$+0,493 \pm 0,304$
g-h	(130)	$^{26}\text{Mg}(\text{d}, \text{n})_{50}^{27}\text{Al} - ^{27}\text{Mg}(\beta^-)_7^{27}\text{Al} - ^{26}\text{Mg}(\text{d}, \text{p})_6^{27}\text{Mg}$	$+(^1\text{n}-^1\text{H})$	$-0,336 \pm 0,051$

Tab. 1. Zur Aufstellung des Systems der Zyklen. Prüfung von Q -Werten auf ihre Zuverlässigkeit mit Hilfe der Werte $t_{\varrho} = \varepsilon_{\varrho} / |\sqrt{b_{\varrho\varrho}}|$.

Hilfsgrößen	Hilfszyklen	gemessene Werte MeV \pm keV	ausgeglichene Werte MeV \pm keV
$(^1\text{n}-^1\text{H}) =$	${}^3\text{T}(\beta^-)_0^{^3\text{He}} - {}^3\text{T}(\text{p}, \text{n})_1^{^3\text{He}}$	$0,7821 \pm 1,0$	$0,7814 \pm 0,9$
$E_{\text{d}} =$	${}^1\text{H}(\text{n}, \gamma)_2^{^2\text{D}} - \{ -{}^1\text{H}(\text{d}, \text{p})^2\text{D} \}$	$2,227 \pm 2$	$2,2262 \pm 1,3$
$(E_{\text{t}} - E_{\text{d}}) =$	${}^9\text{Be}(\text{p}, \text{a})_2^{^6\text{Li}} + {}^6\text{Li}(\text{p}, \text{a})^3\text{He} - \{ +{}^3\text{He}(\alpha, \tau)^4\text{He} \} - {}^8\text{Be}(\gamma, \alpha)^4\text{He} - {}^9\text{Be}(\text{p}, \text{d})_1^{^8\text{Be}}$	$5,4955 \pm 3,3$	$5,4939 \pm 2,0$
$(E_{\text{t}} - E_{\text{t}}) =$	${}^3\text{T}(\text{p}, \text{n})_1^{^3\text{He}} - \{ +{}^3\text{He}(\tau, \tau)^3\text{T} \}$	$-0,764 \pm 1$	$-0,7634 \pm 0,9$
$[(^1\text{n}-^1\text{H}) + (E_{\text{a}}-3E_{\text{d}})] =$	${}^{14}\text{N}(\text{d}, \text{p})^{15}\text{N} + {}^{15}\text{N}(\text{p}, \text{a})^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C}(\text{d}, \text{p})^{13}\text{C} + {}^{13}\text{C}(\text{d}, \text{p})^{14}\text{C} + {}^{14}\text{C}(\beta^-)^{14}\text{N}$	$22,394 \pm 9$	$22,395 \pm 6$
$E_{\text{t}} =$	${}^9\text{Be}(\text{p}, \text{a})_2^{^6\text{Li}} + {}^6\text{Li}(\text{p}, \text{a})^3\text{He} - \{ +{}^3\text{He}(\alpha, \tau)^4\text{He} \} - {}^8\text{Be}(\gamma, \alpha)^4\text{He} - {}^9\text{Be}(\gamma, \text{n})^8\text{Be}$	$7,7195 \pm 3,7$	$7,7201 \pm 2,6$
$E_{\text{t}} =$	${}^9\text{Be}(\text{p}, \text{a})_2^{^6\text{Li}} + {}^6\text{Li}(\text{p}, \text{a})^3\text{He} - {}^3\text{T}(\text{p}, \text{n})_1^{^3\text{He}} + \{ +{}^3\text{T}(\alpha, \tau)^4\text{He} \} - {}^8\text{Be}(\gamma, \alpha)^4\text{He} - {}^9\text{Be}(\gamma, \text{n})^8\text{Be}$	$8,4835 \pm 3,8$	$8,4835 \pm 2,6$
$(E_{\text{t}} - E_{\text{d}}) =$	$(E_{\text{t}})_3^{^3\text{He}} - (E_{\text{t}})_1^{^1\text{H}}$	$6,2595 \pm 3,4$	$6,2573 \pm 1,9$
$(E_{\text{a}} - 3E_{\text{d}}) =$	$[(^1\text{n}-^1\text{H})_9^{^1\text{H}} + (E_{\text{a}}-3E_{\text{d}})] - [{}^1\text{n}-{}^1\text{H}]$	$21,612 \pm 9$	$21,614 \pm 6$
$(E_{\text{a}} - 2E_{\text{d}}) =$	$[(^1\text{n}-^1\text{H})_9^{^1\text{H}} + (E_{\text{a}}-3E_{\text{d}})] - [{}^1\text{n}-{}^1\text{H}] + E_{\text{d}}_2$	$23,839 \pm 9$	$23,840 \pm 6$
$E_{\text{a}} =$	$[(^1\text{n}-^1\text{H})_9^{^1\text{H}} + (E_{\text{a}}-3E_{\text{d}})] - [{}^1\text{n}-{}^1\text{H}] + 3E_{\text{d}}_6$	$28,293 \pm 11$	$28,292 \pm 6$

Tab. 2. Die Hilfszyklen für die Neutron-Proton-Differenz und die Bindungsenergien der Geschoßteilchen.

miteinander verbindet, eine Bedingung (22), wenn man die vorkommenden Q_r -, Q_β - und Q_m -Werte gemäß den Gln. (4), (7) und (9) kombiniert und die Hilfsgrößen von Tab. 2 entsprechend berücksichtigt.

Es ist nun seit längerer Zeit bekannt^{3, 8}, daß die Q_m -Werte des gleichen Dubletts und ebenso die nach 2. gebildeten Zyklen oft unerklärte Diskrepanzen ergeben, selbst dann, wenn es sich um die Messungen des gleichen Autors unter verschiedenen Bedingungen handelt. Diese Messungen müssen demnach durch systematische Fehler entstellt sein. Eine kürzlich erschienene Arbeit von zweien von uns¹² ist der Aufklärung einer solchen Fehlerquelle gewidmet. Ebenso weiß man, daß die Bedingungen der unter 3. aufgeführten Art oft auf ein unzulässig großes I_q führen. Wir beschränkten daher unseren Ausgleich auf Q_r - und Q_β -Werte und diskutieren im letzten Abschnitt die Diskrepanz zwischen den so erhaltenen Ausgleichswerten und den massenspektrographischen Messungen.

Aus den Berichten I und II wurden für die Sichtung der experimentellen Daten in Tab. 3 alle diejenigen Reaktionen und β -Zerfälle übernommen und in Abb. 1 eingezzeichnet, deren Q -Werte auch in mindestens einem Zyklus der 1. Art auftreten. Das bedeutet, daß jede Masse in mindestens zwei Q -Werten vorkommt oder daß in jedem Punkt von Abb. 1 mindestens zwei Pfeile beginnen oder enden. Ausgelassen wurden lediglich Messungen, die vor 1940 gemacht worden waren oder für die nur eine obere oder untere Grenze bzw. die Erreichung des Grundzustandes als unsicher angegeben wird, und selbstverständlich solche ohne Fehlerangabe, da diese für den Ausgleich kein Gewicht haben. Inverse Reaktionen, d. h. solche, deren Q -Werte sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, wurden nicht getrennt aufgeführt, sondern es wurde für eine der beiden Reaktionen der im Bericht I bereits gebildete gewichtete Mittelwert samt Fehler übernommen. Ebenso wurde in den Fällen, wo der gleiche Q -Wert von mehreren verschiedenen Autoren gemessen wurde, aus den beiden Berichten I und II der in den Spalten Average Q -Value bzw. Adopted Q aufgeführte, von den Berichterstattern bereits gebildete gewichtete Mittelwert samt Fehler übernommen. Die Gesamtheit dieser Q -Werte ist in Spalte 4 von Tab. 3 zusammengestellt. Da die beiden Berichte offensichtlich mit großer Sachkenntnis verfaßt sind, haben wir

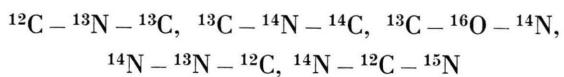
uns nicht befugt gefühlt, irgendwelche Änderungen an den dort angegebenen Werten etwa wegen verschiedener benutzter Eichstandards etc. vorzunehmen. Es wurden lediglich aus den im folgenden Abschnitt beschriebenen Gründen 9 dieser Q -Werte, die in Tab. 3 mit den Nummern $I = 197$ bis 205 bezeichnet sind, nicht für geeignet befunden, als Eingangswerte für den Ausgleich zu dienen.

Bei der Aufstellung der Zyklen (22) ist zunächst zu beachten, daß unter den Polygonen auch die „Zweiecke“, d. h. solche zwei Punkte in Abb. 1 verstanden werden müssen, die durch mehr als einen Pfeil miteinander verbunden sind. So liefern z. B. ^{12}C und ^{13}C , die in drei Reaktionen von verschiedenem Q -Wert als Target bzw. als Endprodukt auftreten, zwei Zyklen, nämlich

$$\left\{ {}^{12}\text{C}(\text{n}, \gamma) {}^{13}\text{C} - {}^{12}\text{C}(\text{d}, \text{p}) {}^{13}\text{C} - E_{\text{d}} \right\} \text{ sowie} \\ \left\{ {}^{13}\text{C}(\text{d}, \text{t}) {}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C}(\text{d}, \text{p}) {}^{13}\text{C} - (E_{\text{t}} - E_{\text{d}}) + E_{\text{d}} \right\},$$

die nach dem Ausgleich Null ergeben müssen. In gleicher Weise kann man für die Dreiecke, Vierecke und höheren Polygone von Abb. 1 fortfahren. Doch erhält man auf diese Weise sehr leicht viel mehr als r Zyklen, d. h. sie sind nicht linear unabhängig voneinander und vor allem ist man alles andere als willkürlich in der Auswahl der r linear unabhängigen Zyklen.

Um diesen Nachteil zu beseitigen, fordern wir, daß die Zyklen so aufgestellt seien, daß jeder Zyklus den kleinstmöglichen Wert von b_{qq} besitzt, m. a. W. es soll in dem endgültig akzeptierten System (22) nicht möglich sein, durch einfache Addition und Subtraktion von Zyklen neue Zyklen mit kleinerem b_{qq} zu erhalten. Zur Illustration des eben Gesagten diene Tab. 1. Hier sind zunächst 6 mit a bis f bezeichnete Zyklen aufgeführt, die sich unmittelbar aus Abb. 1 durch Umlaufen der Dreiecke



und ${}^{14}\text{N} - {}^{13}\text{N} - {}^{13}\text{C}$ ergeben. Zur Erleichterung des Folgenden ist unter jedem Prozeß der Fehler q_I des zugehörigen Q_I -Wertes in keV notiert. Nun sucht man durch fortlaufende additive und subtraktive Kombination dieser Gleichungen (wie in Spalte 1 von Tab. 1 angegeben) solche Reaktionen oder Reaktionsgruppen zu eliminieren, die sich durch Reaktionsgruppen von kleinerer Fehlerquadratsumme ersetzen lassen. So liefert bereits $(b + c)$ bzw. $(f - b)$ die beiden neuen

¹² F. EVERLING u. J. MATTUAUCH, Z. Naturforschg. **11a**, 68 [1956].

<i>I</i>	Prozeß	<i>Q</i> (MeV)	<i>q</i> (keV)	<i>Q*</i> (MeV)	<i>q*</i> (keV)	<i>v/ q </i>	<i>l</i>	<i>g</i>
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$^1\text{n}(\beta^-)^1\text{H}$	0,782	13	0,7814	0,9	0,04	-0,01	1
2	$^2\text{D}(\gamma, \text{n})^1\text{H}$	- 2,227	2	- 2,2262	1,3	-0,41		
3	$^2\text{D}(\text{n}, \gamma)^3\text{T}$	6,251	8	6,2573	2,0	-0,79	-0,98	2
4	$^2\text{D}(\text{p}, \gamma)^3\text{He}$	5,50	30	5,4939	2,0	0,20	0,15	3
5	$^2\text{D}(\text{d}, \text{p})^3\text{T}$	4,031	6	4,0311	2,0	-0,02	-0,21	4
6	$^2\text{D}(\text{d}, \text{n})^3\text{He}$	3,265	9	3,2677	2,0	-0,30	-0,36	5
7	$^3\text{T}(\text{p}, \text{n})^3\text{He}$	- 0,764	1	- 0,7634	0,9	-0,62		
8	$^3\text{T}(\text{p}, \gamma)^4\text{He}$	19,7	200	19,8086	4,4	-0,54	-0,53	6
9	$^3\text{T}(\text{d}, \alpha)^1\text{n}$	17,7	300	17,5824	4,3	0,39	0,40	7
10	$^3\text{T}(\tau, \text{p})^5\text{He}$	11,15	50	11,133	29	0,34	0,25	8
11	$^3\text{T}(\beta^-)^3\text{He}$	0,0181	0,2	0,01806	0,20	0,18		
12	$^3\text{He}(\text{d}, \text{p})^4\text{He}$	18,45	170	18,3458	4,1	0,61	0,63	9
13	$^3\text{He}(\text{d}, \gamma)^5\text{Li}$	16,3	200	16,58	70	-1,38	-1,71	10
14	$^3\text{He}(\tau, \text{p})^5\text{Li}$	10,86	150	11,08	70	-1,48	-1,82	11
15	$^5\text{He}(\gamma, \text{n})^4\text{He}$	0,95	40	0,956	29	-0,14		
16	$^6\text{He}(\beta^-)^6\text{Li}$	3,50	50	3,532	26	-0,64	-0,86	12
17	$^5\text{Li}(\gamma, \text{p})^4\text{He}$	1,6	500	1,77	70	-0,34	-0,12	13
18	$^6\text{Li}(\gamma, \text{n})^5\text{Li}$	- 5,37	140	- 5,47	70	0,70	-0,06	14
19	$^6\text{Li}(\text{n}, \alpha)^3\text{T}$	4,797	22	4,7860	1,9	0,50	0,45	15
20	$^6\text{Li}(\text{n}, \text{d})^5\text{He}$	- 2,57	100	- 2,427	29	-1,43	-1,37	16
21	$^6\text{Li}(\text{p}, \alpha)^3\text{He}$	4,023	2	4,0226	1,7	0,20		
22	$^6\text{Li}(\text{d}, \alpha)^4\text{He}$	22,386	11	22,3684	4,2	1,60	0,86	17
23	$^6\text{Li}(\text{d}, \text{tp})^4\text{He}$	2,51	40	2,5598	2,0	-1,25	-1,25	18
24	$^6\text{Li}(\text{d}, \text{t})^5\text{Li}$	0,9	100	0,79	70	1,10		
25	$^6\text{Li}(\text{d}, \text{p})^7\text{Li}$	5,027	3	5,0260	1,9	0,32		
26	$^6\text{Li}(\text{d}, \text{n})^7\text{Be}$	3,40	50	3,3808	1,9	0,38	0,37	19
27	$^6\text{Li}(\text{t}, \text{d})^7\text{Li}$	0,982	7	0,9949	2,6	-1,84	-1,46	20
28	$^6\text{Li}(\text{t}, \text{p})^8\text{Li}$	0,784	15	0,8028	2,8	-1,25	-1,17	21
29	$^7\text{Li}(\gamma, \text{p})^6\text{He}$	- 9,6	300	- 10,003	26	1,34	1,38	22
30	$^7\text{Li}(\text{p}, \alpha)^4\text{He}$	17,346	10	17,3424	4,3	0,36		
31	$^7\text{Li}(\text{p}, \text{n})^7\text{Be}$	- 1,6453	0,4	- 1,64526	0,40	-0,10		
32	$^7\text{Li}(\text{p}, \gamma)^8\text{Be}$	17,1	200	17,2474	4,3	-0,74	-0,76	24
33	$^7\text{Li}(\text{d}, \alpha)^5\text{He}$	14,2	100	14,161	29	0,39	0,35	25
34	$^7\text{Li}(\text{d}, \text{p})^8\text{Li}$	- 0,192	1	- 0,1921	1,0	0,09		
35	$^7\text{Li}(\text{d}, \text{n})^8\text{Be}$	15,0	100	15,0212	4,2	-0,21	0,18	26
36	$^7\text{Li}(\text{t}, \alpha)^6\text{He}$	9,79	30	9,806	26	-0,52		
37	$^8\text{Be}(\gamma, \alpha)^4\text{He}$	0,0945	1,3	0,0950	1,2	-0,37		
38	$^9\text{Be}(\gamma, \text{p})^8\text{Li}$	- 16,93	150	- 16,8799	4,4	-0,33	-0,30	27
39	$^9\text{Be}(\gamma, \text{n})^8\text{Be}$	- 1,665	2	- 1,6666	1,4	0,78	1,00	28
40	$^9\text{Be}(\gamma, \gamma)^{10}\text{Be}$	6,816	6	6,8126	3,3	0,57	0,50	29
41	$^9\text{Be}(\text{p}, \alpha)^6\text{Li}$	2,126	2	2,1259	1,6	0,04		
42	$^9\text{Be}(\text{p}, \text{d})^8\text{Be}$	0,559	1	0,5596	0,9	-0,62		
43	$^9\text{Be}(\text{p}, \text{n})^9\text{B}$	- 1,852	2	- 1,8520	2,0	0,00		
44	$^9\text{Be}(\text{p}, \gamma)^{10}\text{B}$	6,5	100	6,5859	2,4	-0,86	-0,87	30
45	$^9\text{Be}(\text{d}, \alpha)^7\text{Li}$	7,153	3	7,1520	1,9	0,35		
46	$^9\text{Be}(\text{d}, \text{t})^8\text{Be}$	4,598	12	4,5907	1,9	0,60	0,52	32
47	$^9\text{Be}(\text{d}, \text{p})^{10}\text{Be}$	4,588	6	4,5864	3,2	0,27	0,39	33
48	$^9\text{Be}(\text{d}, \text{n})^{10}\text{B}$	4,35	20	4,3597	2,2	-0,48	-0,48	34
49	$^9\text{Be}(\alpha, \text{p})^{12}\text{B}$	- 6,92	50	- 6,879	6	-0,82	-0,61	35
50	$^{10}\text{Be}(\beta^-)^{10}\text{B}$	0,557	4	0,5548	3,1	0,56		
51	$^{10}\text{B}(\gamma, \text{n})^9\text{B}$	- 8,55	250	- 8,4379	3,1	-0,45	-0,45	36
52	$^{10}\text{B}(\text{n}, \alpha)^7\text{Li}$	2,786	8	2,7923	1,7	-0,78	-0,88	37
53	$^{10}\text{B}(\text{p}, \alpha)^7\text{Be}$	1,148	2	1,1470	1,7	0,50		
54	$^{10}\text{B}(\text{p}, \tau)^8\text{Be}$	- 0,536	3	- 0,5323	2,1	-1,22		
55	$^{10}\text{B}(\text{p}, \text{n})^{10}\text{C}$	- 4,35	200	- 4,54	90	0,93	1,04	39
56	$^{10}\text{B}(\text{d}, \alpha)^8\text{Be}$	17,86	40	17,8135	4,2	1,16	1,18	40
57	$^{10}\text{B}(\text{d}, \text{p})^{11}\text{C}$	9,235	11	9,238	5	-0,30	-2,62	41
58	$^{10}\text{B}(\text{d}, \text{n})^{11}\text{C}$	6,6	100	6,474	6	1,26	0,85	42
59	$^{10}\text{B}(\alpha, \text{d})^{12}\text{C}$	1,39	10	1,355	6	3,49		
60	$^{10}\text{B}(\alpha, \text{p})^{13}\text{C}$	4,08	100	4,076	6	0,04	-0,32	44
61	$^{11}\text{B}(\gamma, \text{n})^{10}\text{B}$	-11,50	250	-11,465	5	-0,14	0,01	45
62	$^{11}\text{B}(\text{p}, \alpha)^8\text{Be}$	8,585	6	8,5751	4,1	1,64		
63	$^{11}\text{B}(\text{p}, \text{n})^{11}\text{C}$	- 2,762	3	- 2,7647	2,8	0,82		

<i>I</i>	Prozeß	<i>Q</i> (MeV)	<i>q</i> (keV)	<i>Q*</i> (MeV)	<i>q*</i> (keV)	<i>v/q</i>	<i>l</i>	<i>q</i>
1	2	3	4	5	6	7	8	9
64	$^{11}\text{B}(\text{d}, \alpha)^9\text{Be}$	8,018	7	8,0155	4,1	0,35	-0,86	46
65	$^{11}\text{B}(\text{d}, \text{p})^{12}\text{B}$	1,137	4	1,1365	4,0	0,13		
66	$^{11}\text{B}(\text{d}, \text{n})^{12}\text{C}$	13,8	200	13,730	5	0,35	0,37	47
67	$^{11}\text{B}(\alpha, \text{p})^{14}\text{C}$	0,75	10	0,7784	4,5	-2,84	-2,44	48
68	$^{12}\text{B}(\beta^-)^{12}\text{C}$	13,43	60	13,3753	6,4	0,91	0,97	49
69	$^{10}\text{C}(\beta^+)^{10}\text{B}$	3,8	100	3,75	90	0,46		
70	$^{11}\text{C}(\beta^+)^{11}\text{B}$	1,997	7	1,9830	2,9	2,00	2,23	50
71	$^{12}\text{C}(\gamma, \text{n})^{11}\text{C}$	-19,0	400	-18,721	6	-0,70	-0,71	51
72	$^{12}\text{C}(\text{n}, \gamma)^{13}\text{C}$	4,949	6	4,9474	2,1	0,27	0,00	52
73	$^{12}\text{C}(\text{d}, \text{p})^{13}\text{C}$	2,722	3	2,7212	1,9	0,26		
74	$^{12}\text{C}(\text{d}, \text{n})^{13}\text{N}$	-0,281	3	-0,2818	2,3	0,26		
75	$^{13}\text{C}(\text{p}, \text{n})^{13}\text{N}$	-3,003	3	-3,0030	2,3	0,00		
76	$^{13}\text{C}(\text{p}, \gamma)^{14}\text{N}$	7,62	80	7,5405	3,8	0,99	0,98	54
77	$^{13}\text{C}(\text{d}, \alpha)^{11}\text{B}$	5,164	4	5,1620	3,6	0,49		
78	$^{13}\text{C}(\text{d}, \text{t})^{12}\text{C}$	1,310	3	1,3099	2,1	0,03		
79	$^{13}\text{C}(\text{d}, \text{p})^{14}\text{C}$	5,942	4	5,9404	3,4	0,39		
80	$^{13}\text{C}(\text{d}, \text{n})^{14}\text{N}$	5,17	50	5,3143	3,5	-2,89	-2,89	56
81	$^{13}\text{C}(\alpha, \text{n})^{16}\text{O}$	2,22	160	2,1992	4,3	0,13	0,13	57
82	$^{14}\text{C}(\beta^+)^{14}\text{N}$	0,155	1	0,1553	1,0	-0,32		
83	$^{13}\text{N}(\beta^+)^{13}\text{C}$	2,23	10	2,2216	2,4	0,84	0,87	58
84	$^{14}\text{N}(\gamma, \text{n})^{13}\text{N}$	-10,7	200	-10,5435	4,3	-0,78	-0,78	59
85	$^{14}\text{N}(\text{n}, \alpha)^{11}\text{B}$	-0,27	60	-0,1523	4,7	-1,96	-1,98	60
86	$^{14}\text{N}(\text{n}, \text{p})^{14}\text{C}$	0,624	4	0,6261	1,3	-0,53	-0,73	61
87	$^{14}\text{N}(\text{n}, \gamma)^{15}\text{N}$	10,832	8	10,8421	4,2	-1,26	-0,83	62
88	$^{14}\text{N}(\text{p}, \text{n})^{14}\text{O}$	-6,0	200	-5,934	39	-0,33	-0,33	63
89	$^{14}\text{N}(\text{p}, \gamma)^{15}\text{O}$	7,34	130	7,355	6	-0,12	-0,11	64
90	$^{14}\text{N}(\text{d}, \alpha)^{12}\text{C}$	13,39	80	13,5780	4,3	-2,35	-2,30	65
91	$^{14}\text{N}(\text{d}, \text{p})^{15}\text{N}$	8,614	7	8,6159	4,1	-0,27		
92	$^{14}\text{N}(\text{d}, \text{n})^{15}\text{O}$	5,12	40	5,129	6	-0,23	-0,17	66
93	$^{14}\text{N}(\alpha, \text{p})^{17}\text{O}$	-1,16	40	-1,1955	4,2	0,89	0,89	67
94	$^{15}\text{N}(\text{p}, \alpha)^{12}\text{C}$	4,961	3	4,9622	2,7	-0,39		
95	$^{15}\text{N}(\text{d}, \alpha)^{13}\text{C}$	7,681	9	7,6834	3,1	-0,26	-0,20	68
96	$^{15}\text{N}(\text{d}, \text{p})^{16}\text{N}$	0,23	150	0,43	130	-1,31		
97	$^{15}\text{N}(\text{d}, \text{n})^{16}\text{O}$	10,9	500	9,8826	4,8	2,03	2,03	69
98	$^{16}\text{O}(\beta^-)^{16}\text{O}$	10,5	500	10,24	130	0,53	0,13	70
99	$^{14}\text{O}(\beta^+)^{14}\text{N}$	5,15	40	5,153	39	-0,07		
100	$^{15}\text{O}(\beta^+)^{15}\text{N}$	2,705	5	2,705	5	-0,06		
101	$^{16}\text{O}(\gamma, \text{n})^{15}\text{O}$	-15,8	200	-15,596	7	-1,02	-1,01	71
102	$^{16}\text{O}(\text{d}, \alpha)^{14}\text{N}$	3,115	2,5	3,1151	2,5	-0,03		
103	$^{16}\text{O}(\text{d}, \text{p})^{17}\text{O}$	1,919	4	1,9196	3,4	-0,15		
104	$^{16}\text{O}(\text{d}, \text{n})^{17}\text{F}$	-1,630	4	-1,6309	3,5	0,22		
105	$^{18}\text{O}(\text{p}, \alpha)^{15}\text{N}$	3,961	9	3,957	8	0,40		
106	$^{18}\text{O}(\text{p}, \text{n})^{18}\text{F}$	-2,453	4	-2,4523	3,9	-0,17		
107	$^{18}\text{O}(\text{d}, \text{n})^{19}\text{F}$	5,7	100	5,722	9	-0,22	-0,27	72
108	$^{19}\text{O}(\beta^-)^{19}\text{F}$	4,5	300	4,53	280	-0,08		
109	$^{17}\text{F}(\beta^+)^{17}\text{O}$	2,771	6	2,7690	4,1	0,33	0,49	73
110	$^{19}\text{F}(\text{n}, \alpha)^{16}\text{N}$	-0,73	250	-1,34	130	2,43	2,76	74
111	$^{19}\text{F}(\text{n}, \text{p})^{19}\text{O}$	-3,9	750	-3,74	280	-0,21	-0,23	75
112	$^{19}\text{F}(\text{n}, \gamma)^{20}\text{F}$	6,63	30	6,602	7	0,92	0,97	76
113	$^{19}\text{F}(\text{p}, \alpha)^{16}\text{O}$	8,117	9	8,118	6	-0,12		
114	$^{19}\text{F}(\text{p}, \text{n})^{19}\text{Ne}$	-4,039	5	-4,0377	4,9	-0,26		
115	$^{19}\text{F}(\text{d}, \alpha)^{17}\text{O}$	10,039	10	10,038	7	0,14	0,21	77
116	$^{19}\text{F}(\text{d}, \text{p})^{20}\text{F}$	4,373	7	4,376	7	-0,47		
117	$^{19}\text{F}(\text{d}, \text{n})^{20}\text{Ne}$	10,80	200	10,652	9	0,74	0,74	78
118	$^{20}\text{F}(\beta^-)^{20}\text{Ne}$	7,04	20	7,057	10	-0,84	-0,81	79
119	$^{19}\text{Ne}(\beta^+)^{19}\text{F}$	3,21	30	3,256	5	-1,54	-1,54	80
120	$^{20}\text{Ne}(\text{n}, \alpha)^{17}\text{O}$	-0,75	50	-0,614	10	-2,72	-2,77	81
121	$^{20}\text{Ne}(\text{d}, \alpha)^{18}\text{F}$	2,791	9	2,788	8	0,38		
122	$^{20}\text{Ne}(\text{d}, \text{p})^{21}\text{Ne}$	4,528	6	4,528	5	0,01		
123	$^{21}\text{Ne}(\text{d}, \alpha)^{19}\text{F}$	6,432	10	6,434	8	-0,20		
124	$^{21}\text{Ne}(\text{d}, \text{p})^{22}\text{Ne}$	8,137	11	8,139	11	-0,16		
125	$^{22}\text{Ne}(\text{d}, \alpha)^{20}\text{F}$	2,62	100	2,672	15	-0,52	-0,47	83
126	$^{22}\text{Ne}(\text{d}, \text{p})^{23}\text{Ne}$	2,964	7	2,964	7	0,00		

<i>I</i>	Prozeß	<i>Q</i> (MeV)	<i>q</i> (keV)	<i>Q*</i> (MeV)	<i>q*</i> (keV)	<i>v/ q </i>	<i>l</i>	<i>ρ</i>
1	2	3	4	5	6	7	8	9
127	$^{22}\text{Na}(\beta^+)^{22}\text{Ne}$	2,840	5	2,840	5	0,05		
128	$^{23}\text{Na}(\gamma, n)^{22}\text{Na}$	-12,05	200	-12,417	14	1,83	1,83	84
129	$^{23}\text{Na}(n, p)^{23}\text{Ne}$	-3,6	800	-3,605	15	0,01	0,01	85
130	$^{23}\text{Na}(p, \alpha)^{20}\text{Ne}$	2,378	3	2,3778	2,9	0,08		
131	$^{23}\text{Na}(p, n)^{23}\text{Mg}$	-4,88	10	-4,875	10	-0,53		
132	$^{23}\text{Na}(d, \alpha)^{21}\text{Ne}$	6,902	10	6,906	5	-0,37	-0,33	86
133	$^{23}\text{Na}(d, p)^{24}\text{Na}$	4,727	5	4,7306	4,8	-0,71		
134	$^{24}\text{Na}(\beta^-)^{24}\text{Mg}$	5,511	5	5,5145	4,8	-0,71		
135	$^{25}\text{Na}(\beta^-)^{25}\text{Mg}$	3,7	300	3,70	290	0,01		
136	$^{23}\text{Mg}(\beta^+)^{23}\text{Na}$	3,97	50	4,093	10	-2,46	-2,51	87
137	$^{24}\text{Mg}(\gamma, n)^{23}\text{Mg}$	-16,4	200	-16,565	12	0,82	0,81	88
138	$^{24}\text{Mg}(n, \gamma)^{25}\text{Mg}$	7,334	7	7,3323	4,2	0,25		
139	$^{24}\text{Mg}(p, \gamma)^{25}\text{Al}$	2,14	100	2,26	50	-1,21	-1,35	90
140	$^{24}\text{Mg}(d, p)^{25}\text{Mg}$	5,097	7	5,1061	4,2	-1,30		
141	$^{24}\text{Mg}(d, n)^{25}\text{Al}$	0,07	60	0,03	50	0,59		
142	$^{25}\text{Mg}(\gamma, p)^{24}\text{Na}$	-11,5	1000	-12,065	6	0,57	0,56	91
143	$^{25}\text{Mg}(d, \alpha)^{23}\text{Na}$	7,019	13	7,044	7	-1,91	-2,13	92
144	$^{25}\text{Mg}(d, p)^{26}\text{Mg}$	8,880	10	8,888	7	-0,78		
145	$^{26}\text{Mg}(\gamma, p)^{25}\text{Na}$	-14,0	1000	-14,03	290	0,03	0,02	94
146	$^{26}\text{Mg}(\gamma, n)^{25}\text{Mg}$	-11,15	200	-11,114	7	-0,18	-0,22	95
147	$^{26}\text{Mg}(n, \gamma)^{27}\text{Mg}$	6,440	8	6,4374	4,6	0,32	0,59	96
148	$^{26}\text{Mg}(p, \gamma)^{27}\text{Al}$	8,4	300	8,251	7	0,50	0,52	97
149	$^{26}\text{Mg}(d, p)^{27}\text{Mg}$	4,207	6	4,2113	4,5	-0,71		
150	$^{27}\text{Mg}(\beta^-)^{27}\text{Al}$	2,591	7	2,595	6	-0,55		
151	$^{25}\text{Al}(\beta^+)^{25}\text{Mg}$	4,2	200	4,29	50	-0,45	-0,22	98
152	$^{27}\text{Al}(n, \gamma)^{28}\text{Al}$	7,724	6	7,7233	4,8	0,11		
153	$^{27}\text{Al}(p, \alpha)^{24}\text{Mg}$	1,595	2	1,5950	2,0	-0,01		
154	$^{27}\text{Al}(p, n)^{27}\text{Si}$	-5,610	10	-5,607	10	-0,33		
155	$^{27}\text{Al}(p, \gamma)^{28}\text{Si}$	11,60	90	11,591	8	0,10	0,09	99
156	$^{27}\text{Al}(d, \alpha)^{25}\text{Mg}$	6,694	10	6,7011	4,4	-0,71	0,16	100
157	$^{27}\text{Al}(d, p)^{28}\text{Al}$	5,494	10	5,4971	4,9	-0,31	-0,25	101
158	$^{27}\text{Al}(d, n)^{28}\text{Si}$	9,08	200	9,364	8	-1,42	-1,42	102
159	$^{27}\text{Al}(z, p)^{30}\text{Si}$	2,27	50	2,380	8	-2,19	-2,08	103
160	$^{27}\text{Al}(z, n)^{30}\text{P}$	-2,9	200	-2,716	30	-0,92	-0,86	104
161	$^{28}\text{Al}(\beta^-)^{28}\text{Si}$	4,65	10	4,649	7	0,12		
162	$^{27}\text{Si}(\beta^+)^{27}\text{Al}$	4,70	70	4,825	10	-1,79	-1,81	105
163	$^{28}\text{Si}(\gamma, n)^{27}\text{Si}$	-16,9	200	-17,197	13	1,49	1,51	106
164	$^{28}\text{Si}(n, \gamma)^{29}\text{Si}$	8,468	8	8,472	5	-0,54		
165	$^{28}\text{Si}(p, n)^{28}\text{P}$	-14,9	400	-14,54	280	-0,90		
166	$^{28}\text{Si}(d, p)^{29}\text{Si}$	6,246	10	6,246	5	-0,01	0,39	108
167	$^{29}\text{Si}(n, \gamma)^{30}\text{Si}$	10,601	11	10,609	6	-0,71		
168	$^{29}\text{Si}(d, \alpha)^{27}\text{Al}$	5,994	11	6,003	7	-0,82		
169	$^{29}\text{Si}(d, p)^{30}\text{Si}$	8,388	13	8,383	6	0,42	0,82	111
170	$^{29}\text{Si}(d, n)^{30}\text{P}$	3,27	40	3,287	30	-0,42		
171	$^{30}\text{Si}(d, \alpha)^{28}\text{Al}$	3,120	10	3,118	7	0,25		
172	$^{30}\text{Si}(d, p)^{31}\text{Si}$	4,364	7	4,369	6	-0,77		
173	$^{31}\text{Si}(\beta^-)^{31}\text{P}$	1,475	7	1,481	6	-0,87		
174	$^{28}\text{P}(\beta^+)^{28}\text{Si}$	13,4	400	13,76	280	-0,90		
175	$^{30}\text{P}(\beta^+)^{30}\text{Si}$	4,29	50	4,314	30	-0,49	-0,49	112
176	$^{31}\text{P}(\gamma, n)^{30}\text{P}$	-12,27	120	-12,391	30	1,01	1,11	113
177	$^{31}\text{P}(n, p)^{31}\text{Si}$	-0,94	130	-0,700	6	-1,85	-1,90	114
178	$^{31}\text{P}(n, \gamma)^{32}\text{P}$	7,94	30	7,934	9	0,18	0,29	115
179	$^{31}\text{P}(\gamma, \alpha)^{28}\text{Si}$	1,909	10	1,916	7	-0,68		
180	$^{31}\text{P}(d, \alpha)^{29}\text{Si}$	8,158	11	8,162	7	-0,35		
181	$^{31}\text{P}(d, p)^{32}\text{P}$	5,704	9	5,708	9	-0,48		
182	$^{31}\text{P}(d, n)^{32}\text{S}$	6,81	80	6,636	9	2,18	2,23	118
183	$^{32}\text{P}(\beta^-)^{32}\text{S}$	1,708	4	1,7088	4,0	-0,20		
184	$^{32}\text{S}(\gamma, d)^{30}\text{P}$	-19,15	200	-19,027	32	-0,62	-0,53	119
185	$^{32}\text{S}(n, \alpha)^{29}\text{Si}$	1,16	150	1,526	12	-2,44	-2,44	120
186	$^{32}\text{S}(n, p)^{32}\text{P}$	-0,93	100	-0,9274	4,1	-0,03	-0,04	121
187	$^{32}\text{S}(n, \gamma)^{33}\text{S}$	8,64	20	8,646	10	-0,31	-0,39	122
188	$^{32}\text{S}(d, p)^{33}\text{S}$	6,422	11	6,420	10	0,17		
189	$^{32}\text{S}(\alpha, p)^{35}\text{Cl}$	-2,04	100	-2,00	70	-0,42		

<i>I</i>	Prozeß	<i>Q</i> (MeV)	<i>q</i> (keV)	<i>Q*</i> (MeV)	<i>q*</i> (keV)	<i>v/q</i>	<i>l</i>	<i>q</i>
1	2	3	4	5	6	7	8	9
190	$^{33}\text{S}(\text{d}, \text{p})^{34}\text{S}$	8,67	250	8,64	160	0,11	0,15	123
191	$^{34}\text{S}(\gamma, \text{n})^{33}\text{S}$	-10,85	200	-10,87	160	0,09		
192	$^{35}\text{S}(\beta^-)^{35}\text{Cl}$	0,1670	0,4	0,16701	0,40	-0,02		
193	$^{35}\text{Cl}(\text{n}, \alpha)^{32}\text{P}$	1,02	110	1,07	70	-0,46	-0,63	124
194	$^{35}\text{Cl}(\text{n}, \text{p})^{35}\text{S}$	0,52	40	0,6144	1,0	-2,36	-2,38	125
195	$^{35}\text{Cl}(\text{n}, \gamma)^{36}\text{Cl}$	8,57	30	8,565	29	0,18		
196	$^{35}\text{Cl}(\text{d}, \text{p})^{36}\text{Cl}$	6,28	100	6,339	29	-0,59	-0,60	126
	Ausgeschieden:							
197	$^{22}\text{Ne}(\alpha, \text{n})^{25}\text{Mg}$	- 0,916	70	- 0,475	14	-6,30	-5,93	127
198	$^{23}\text{Ne}(\beta^-)^{23}\text{Na}$	4,21	20	4,387	15	-8,83	-6,69	128
199	$^{23}\text{Na}(\text{n}, \alpha)^{20}\text{F}$	- 5,4	300	- 3,898	10	-5,01	-4,99	129
200	$^{25}\text{Mg}(\text{d}, \text{n})^{26}\text{Al}$	5,58	100					
201	$^{26}\text{Mg}(\text{d}, \text{n})^{27}\text{Al}$	5,68	50	6,025	7	-6,89	-6,61	130
202	$^{27}\text{Al}(\gamma, \text{n})^{26}\text{Al}$	-14,0	100					
		-12,75	200					131
203	$^{28}\text{Si}(\text{d}, \text{n})^{29}\text{P}$	0,29	40					132
204	$^{30}\text{Si}(\text{d}, \text{n})^{31}\text{P}$	4,92	40	5,069	7	-3,73	-3,64	133
205	$^{29}\text{P}(\beta^+)^{29}\text{Si}$	4,97	10					
	Übersehen:							
a	$^{12}\text{C}(\text{p}, \text{n})^{12}\text{N}$	-18,5	100					
b	$^{12}\text{N}(\beta^+)^{12}\text{C}$	17,6	200					
c	$^{18}\text{F}(\beta^+)^{18}\text{O}$	1,667	8	1,6709	4,0	-0,49	-0,43	

Tab. 3. Die dem Ausgleich zu Grunde gelegten kernphysikalischen Beobachtungswerte $Q \pm q$ und die ausgeglichenen Werte $Q^* \pm q^*$. (Die Tabelle läuft von S. 532—535.)

Zyklen $q = 57$ bzw. $q = 59$, die an Stelle von c bzw. f treten. Es ist augenfällig, daß in den neuen Zyklen die *Q*-Werte von $^{12}\text{C}(\alpha, \text{n})^{16}\text{O}$ bzw. von $^{14}\text{N}(\gamma, \text{n})^{13}\text{N}$ viel schärfer „überprüft“ werden, d. h. mit Reaktionsgruppen von insgesamt viel kleinerer Fehlerquadratsumme kombiniert sind, als in den alten Zyklen c bzw. d, wo unter den „überprüfenden“ Reaktionen die mit den relativ hohen Fehlern von je 80 keV behafteten *Q*-Werte von $^{13}\text{C}(\text{p}, \gamma)^{14}\text{N}$ bzw. $^{14}\text{N}(\text{d}, \alpha)^{12}\text{C}$ auftraten. Letztere hatten bereits in den Zyklen b bzw. e ihre bestmögliche „Überprüfung“ erfahren, so daß diese Zyklen mit $q = 54$ bzw. $q = 65$ in das endgültige System (22) übernommen werden können.

Die konsequente Durchführung dieses Verfahrens ergibt automatisch $r + 5$ voneinander linear unabhängige Zyklen. Zyklen, die bei der ersten Aufstellung überschüssig, d. h. nicht linear unabhängig von den übrigen waren, reduzieren sich von selbst auf solche, die mit einem dieser $r + 5$ Zyklen identisch sind. Daß gerade $r + 5$ Zyklen erhalten werden, ist notwendig, da wir 5 Gleichungen zur Bestimmung der 5 eingeführten Hilfsgrößen E_d , E_t , E_τ , E_a und ($^1\text{n} - ^1\text{H}$) brauchen. Zu ihrer Berechnung werden

diejenigen 5 Zyklen ausgewählt, die die 5 voneinander linear unabhängigen Kombinationen der Hilfsgrößen mit der kleinsten Fehlerquadratsumme liefern. Sie sind in Tab. 2 zusammengestellt und aus ihnen weiter andere Kombinationen der Hilfsgrößen berechnet worden, wie sie in dem nunmehr endgültig verbliebenen System (22) von *r* Bedingungen vorkommen. Bei Polygonen, die in der Nähe des Ursprungs von Abb. 1 liegen, ist es manchmal aus formalen Gründen nützlich, Reaktionen hinzuzufügen, deren *Q*-Werte definitionsgemäß Null sind. Solche Reaktionen sind in Tab. 2 durch geschweifte Einklammerung gemerkt. Auf diese Weise kann man sich immer leicht davon überzeugen, daß man es mit einem richtigen Zyklus zu tun hat. Das z. Tl. bereits besprochene Beispiel des oberen Teiles von Tab. 1 wurde so ausgewählt, um an seiner Hand zu zeigen, wie die konsequente Durchführung unseres Verfahrens schließlich zu einer der erwähnten 5 Gleichungen [hier mit (V) bezeichnet] führt, die in Tab. 2 zur Berechnung der Kombination

$$[(^1\text{n} - ^1\text{H}) + (E_a - 3 E_d)]$$

aufgenommen wurde.

Nunmehr werden in die r Bedingungen für die auftretenden Prozesse sowie für die Hilfsgrößen die zugehörigen Werte von $Q_I \pm q_I$ aus Tab. 3 sowie Tab. 2 eingesetzt und nach den Gln. (22), (30) und (29) für jeden Zyklus die Werte von ε_ϱ , $b_{\varrho\varrho}$ und l_ϱ berechnet. Nicht selten ist mit einer Erniedrigung des Wertes von $b_{\varrho\varrho}$ im neuen gegenüber dem alten Gleichungssystem eine merkliche Erhöhung des Wertes von l_ϱ verbunden. Dies wird besonders augenfällig in dem im unteren Teil von Tab. 1 aufgeführten Beispiel, wo an Stelle des alten Zyklus ϱ der neue $\varrho = 130$ tritt. Eine Erniedrigung von $\sqrt{b_{\varrho\varrho}}$ auf etwa den 6-ten Teil lässt l_ϱ von dem unverfänglichen Wert 1,62 auf den, wie wir sehen werden, unzulässig hohen Wert 6,61 ansteigen. Damit wird wohl klar, was mit einer schärferen „Überprüfung“ der Reaktion $^{26}\text{Mg}(\text{d}, \text{n})^{27}\text{Al}$ gemeint ist, wenn wir noch erwähnen, daß die anderen beiden im letzten Zyklus von Tab. 1 auftretenden Reaktionen bereits in früheren Zyklen mit unverfänglichen l_ϱ -Werten vorgekommen waren.

Es ist nun zweckmäßig, die Zyklen so zu schreiben, daß sie jeweils (und zwar mit positivem Vorzeichen) mit dem Prozeß beginnen, dessen Q -Wert den größten Fehler q_I hat. In der überwiegenden Anzahl der Fälle tritt dieser Prozeß nur einmal, eben in dem betrachteten Zyklus auf. Zum Beispiel kommt $^{13}\text{C}(\text{p}, \gamma)^{14}\text{N}$ (s. Tab. 1) nur im Zyklus $\varrho = 54$ vor. Diese Fälle sind in Spalte 1 von Tab. 3 durch Angabe der Gleichungsnummer ϱ gekennzeichnet. Meist überwiegt dann auch dieses größte q_I^2 stark die Summe aller übrigen in diesem Zyklus auftretenden Fehlerquadrate (im Beispiel des Zyklus $\varrho = 54$ ist $6400 \gg 22$) und man kann mit guter Näherung $\sqrt{b_{\varrho\varrho}}$ durch q_I ersetzen. Da gleichzeitig der so in Tab. 3 markierte, im Zyklus ϱ zuerst angeschriebene Q -Wert beim Ausgleich ein gegenüber den übrigen im gleichen Zyklus auftretenden Q -Werten zu vernachlässigendes Gewicht hat, wird er sich die größte Verbesserung v_I gefallen lassen müssen, die ihrerseits den Hauptteil des Residuums ε_ϱ ausmachen wird. Mit anderen Worten, man wird erwarten, daß die schon vor Durchführung der umfangreichen Ausgleichsrechnung leicht zu berechnenden Werte l_ϱ , die wir zum Zwecke des Vergleiches in den Tab. 1 und 3 mit dem Vorzeichen von ε_ϱ versehen haben, mit den erst nach Durchführung des Ausgleichs berechenbaren Werten von $v_I / |q_I|$ (s. Spalten 5 und 6 von Tab. 3) in den Fällen, in denen der Ausgleich verhältnismäßig große v_I lie-

fert, nach Vorzeichen und Größe übereinstimmen werden. Zum Beispiel werden wir erwarten, daß die an dem Q -Wert der Reaktion $^{13}\text{C}(\text{p}, \gamma)^{14}\text{N}$ anzubringende Verbesserung $v_I \approx l_\varrho |q_I| \approx \varepsilon_\varrho \approx 80 \text{ keV}$ betragen wird, um die der ausgeglichene Wert Q_I^* dieser Reaktion kleiner sein wird als der beobachtete Wert Q_I . Das nach unserer Methode aufgestellte System (22) der Reaktionszyklen stellt demnach so etwas wie eine erste Annäherung an die Ausgleichsrechnung dar und hat sich als Rechenkontrolle nach Durchführung des Ausgleichs als recht nützlich erwiesen.

4. Die Sichtung der experimentellen Daten

Die Beantwortung der Frage nach dem größten Wert von l_ϱ , der noch für den Ausgleich zugelassen werden soll, wird durch das Wahrscheinlichkeits-

$$\text{integral } \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ gegeben. Das im vor-}$$

gen Abschnitt aufgestellte System der r Zyklen können wir mit r voneinander unabhängigen Beobachtungen ein und derselben Größe vergleichen, deren wahren Wert – nämlich Null – wir kennen. Ebenso ist z. B. in der Geodäsie der wahre Wert der Winkelsumme eines Polygons schon vor der Messung bekannt. Nur ist jede der r Beobachtungen mit einer anderen Methode gemacht worden, deren Genauigkeitsmaß durch die Streuung σ_ϱ bestimmt ist. Die ε_ϱ sind in diesem Vergleich die wahren Fehler jeder einzelnen Beobachtung. Noch anschaulicher ist es, an eine Kompanie von r Soldaten, die verschieden gute Schützen sein sollen, zu denken. Jeden Soldaten lassen wir einen Schuß auf eine Zielscheibe abgeben und messen den Abstand ε_ϱ des Einschußpunktes vom Zielpunkt der Scheibe. Die Streuung σ_ϱ jedes Schützen sei aus vorhergehenden Schußserien bekannt. Bei vorgegebenem l haben wir nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei $r \Phi(l/\sqrt{2})$ Schützen (Zyklen) zu erwarten, daß ihr Schuß das Ziel besser getroffen hat, als das l -fache ihrer Streuungen angibt, daß also $\varepsilon_\varrho < l \sigma_\varrho$ war. Zwischen den Werten l und $l + \Delta l$ werden die Schüsse von

$$\Delta r = r \Delta \Phi(l/\sqrt{2}) = r \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}l^2} \Delta l$$

Schützen (Zyklen) liegen. Ermitteln wir schließlich durch nachträgliches Abzählen die Anzahl Δm der Schützen (Zyklen), deren Schüsse im Intervall

$$(1 - \frac{1}{2}\Delta l) < l \leq (1 + \frac{1}{2}\Delta l)$$

liegen, nämlich

$$\Delta m = r \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-1/2} \Delta l,$$

so erhalten wir schließlich die Verteilung der Schützen (Zyklen) auf die verschiedenen Werte von l

$$\Delta r = e^{-\varrho_0^2(l^2-1)} \Delta m. \quad (31)$$

Die gleiche Betrachtung hätten wir auch anstellen können, wenn wir zur Beurteilung der Genauigkeit der verwandten Methode bzw. der Güte der Schützen nicht die Streuung (mittlerer Fehler der Einzelbeobachtung) σ , sondern den wahrscheinlichen Fehler der Einzelbeobachtung $\varrho = \varrho_0 \sqrt{2} \sigma = 0,6745 \sigma$ benutzt hätten*. Wir hätten dann überall in der vorigen Betrachtung $1/\sqrt{2}$ durch ϱ_0 zu ersetzen und erhalten an Stelle von (31)

$$\Delta r = e^{-\varrho_0^2(l^2-1)} \Delta m. \quad (31 \text{ a})$$

Je nachdem ob die in der Literatur angegebenen und in Tab. 3 aufgeführten Fehler q_I als mittlere oder als wahrscheinliche Fehler aufzufassen sind, wäre der Wert von \sqrt{b} jeder Gleichung des Systems (22) mit σ oder mit ϱ zu identifizieren. Die Zahl r der von uns aufgestellten Zyklen ist nun groß genug, um damit ein wenig Statistik zu treiben, um zu versuchen, ob wir zwischen diesen beiden Fällen unterscheiden können, und vor allem um zu ermitteln, welches der größte noch zuzulassende l -Wert sein soll. Dazu wurde für die Zwecke von Abb. 2 $\Delta l = 0,3$ gewählt und durch Abzählen festgestellt, daß $\Delta m = 19$ Zyklen l_ϱ -Werte im Intervall $0,85 < l_\varrho \leq 1,15$ haben. Damit wurden die beiden Kurven (31) und (31 a) berechnet und in Abb. 2 eingetragen, die sich im Punkt mit der Abszisse $l = 1$ und der Ordinate 19 schneiden müssen. Hierauf wurde für jedes der aufeinanderfolgenden Intervalle der Größe $\Delta l = 0,3$ durch Abzählen die Anzahl der Zyklen ermittelt, die Werte von l_ϱ in diesem Intervall haben. Diese Anzahlen sind in dem Histogramm von Abb. 2 wie üblich durch die Höhe der Rechtecke wiedergegeben. Aus Abb. 2 muß man wohl schließen, daß die Verteilung der l_ϱ -Werte in der Mehrzahl der Fälle, besonders für $l_\varrho < 2$, besser durch die Kurve (31) als durch die Kurve (31 a) wiedergegeben wird, während für eine kleinere Zahl von Fällen, bei denen $l_\varrho \geq 2$ ist, das Umgekehrte der Fall zu sein scheint. Das bedeutet, daß die von den Beobachtern angegebenen und von uns zur Er-

mittlung der Gewichte jeder Beobachtung verwendeten Fehlerangaben q_I im Durchschnitt als etwas aufzufassen sind, das zwischen dem mittleren und dem wahrscheinlichen Fehler liegt. Um den Ausgleich nicht unnötigerweise durch die Aufnahme von evtl. unrichtigen Meßwerten bzw. durch falsche Gewichtsverteilung zu fälschen, wurde daher beschlossen, als größten zulässigen l_ϱ -Wert denjenigen im Intervall 3 bis 3,3 anzusehen, für dessen Auftreten Kurve (31) gerade noch eine merkliche von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit angibt. Die 7 Zyklen mit l_ϱ -Werten größer als 3,3 (in Abb. 2 sind die zugehörigen Rechtecke schraffiert) wurden aus dem System gestrichen und die nur in ihnen vorkommenden 9 Werte $Q_I \pm q_I$, die in Tab. 3 mit den Nummern $I = 197$ bis 205 aufgeführt sind, wurden nicht für den Ausgleich verwendet. Damit ergibt sich die Zahl der für den Ausgleich als Eingangswerte zugelassenen Werte Q_I zu $N = 196$, die $n = 70$ Massen enthalten und durch $r = 126$ Zyklen miteinander verknüpft sind.

Der Vollständigkeit halber soll noch erwähnt werden, daß irrtümlich die Aufnahme von drei Q -Werten aus den Berichten I und II unterlassen worden war, nämlich die von $^{12}\text{C}(p, n) ^{12}\text{N}$, von $^{12}\text{N}(\beta^+) ^{12}\text{C}$ und von $^{18}\text{F}(\beta^+) ^{18}\text{O}$. Die beiden ersten Prozesse hätten eine neue Masse, nämlich die von ^{12}N , jedoch mit beträchtlichem Fehler geliefert, da bei ihnen die Fehler q_I mit 100 bzw. 200 keV angegeben sind. Der Fehler des Q -Wertes von $^{18}\text{F}(\beta^+) ^{18}\text{O}$ ist mit 8 keV angegeben. Er hätte, wenn auch nicht wesentlich, die Massendifferenz $^{18}\text{F} - ^{18}\text{O}$ verbessert, die in der Hauptsache durch den Q -Wert der Reaktion $^{18}\text{O}(p, n) ^{18}\text{F}$ bestimmt ist, der mit einem Fehler von nur 4 keV behaftet ist.

5. Durchführung der Ausgleichsrechnung

Man beginnt mit der Aufstellung des rechteckigen Schemas (Matrix) der stöchiometrischen Koeffizienten z_{li} , das $N = 196$ Zeilen und $n = 70$ Spalten besitzt, die den Q_I -Werten der 196 Prozesse bzw. den Massen M_i der 70 Nuklide zugeordnet werden. Die Zuordnung der Nuklide erfolgte nach wachsendem Z und innerhalb des gleichen Elementes nach steigendem A , wie aus Tab. 4 ersichtlich ist. Die Reihenfolge der Prozesse, nach Target bzw. β -Strahler und für das gleiche Target nach den Geschoßteilchen geordnet, war die von Tab. 3, die sich eng an die schon in den Berichten I und II vorgenom-

* Die (transzendente) Zahl ϱ_0 ist bekanntlich durch $\Phi(\varrho_0) = 1/2$ definiert.

<i>i</i>	Nuklid	<i>M*</i> (MeV)	<i>m*</i> (keV)	<i>M*</i> (mME)	<i>m*</i> (μ ME)	<i>E*</i> (MeV)	<i>e*</i> (keV)
1	2	3	4	5	6	7	8
1	^1n	8,3658 ₁	1,6	8,9842 ₇	1,7	—	—
2	^1H	7,5843 ₆	1,7	8,1450 ₅	1,8	—	—
3	^2D	13,7240	2,7	14,7386	2,9	2,2262	1,3
4	^3T	15,8325 ₆	4,2	17,0029 ₅	4,5	8,4834 ₈	2,6
5	^3He	15,8144 ₄	4,2	16,9835 ₅	4,5	7,7201 ₀	2,6
6	^4He	3,6082	2,0	3,8750	2,1	28,292	5
7	^3Li	12,930	29	13,886	31	27,336	29
8	^4He	19,393	27	20,827	29	29,239	26
9	^3Li	12,96	70	13,92	70	26,52	70
10	^4Li	15,8609	4,4	17,0335	4,7	31,990	7
11	^7Li	16,974 ₄₂	6	18,229 ₃₃	6	39,241 ₄₁	7
12	^7Li	23,306 ₂	7	25,029 ₂	7	41,275 ₉	8
13	^{10}Be	17,838 ₃₃	6	19,157 ₀₆	6	37,596 ₅₅	7
14	^{10}Be	7,3115	3,9	7,8520	4,2	56,489	10
15	^{10}Be	14,0107	4,9	15,046	5	58,156	11
16	^{10}Be	15,564 ₆	7	16,714 ₆	7	64,968 ₄	12
17	^{10}B	15,081 ₃	5	16,196 ₂	6	56,303 ₈	11
18	^{10}B	15,009 ₂	6	16,118 ₈	6	64,741 ₄	12
19	^{11}B	11,9105	4,6	12,791	5	76,206	15
20	^{12}B	16,913 ₄	7	18,164 ₀	7	79,568 ₄	16
21	^{10}C	18,76	90	20,15	100	60,21	90
22	^{11}C	13,893 ₅	6	14,920 ₆	6	73,441 ₇	15
23	^{12}C	3,5384	3,6	3,8000	3,9	92,163	19
24	^{13}C	6,9568	3,8	7,4711	4,1	97,110	19
25	^{14}C	7,1560	2,9	7,6850	3,1	105,277	21
26	^{13}N	9,1784	4,5	9,8569	4,8	94,107	19
27	^{14}N	7,0007	2,8	7,5182	3,0	104,651	21
28	^{15}N	4,5244	4,2	4,8589	4,5	115,493	23
29	^{16}N	10,24	130	10,99	130	118,15	130
30	^{14}O	12,153	39	13,052	42	98,716	45
31	^{16}O	7,230	6	7,764	7	112,006	24
32	^{17}O	4,2200	3,6	4,5320	3,9	131,747	26
33	^{18}O	4,505 ₇	9	4,838 ₈	9	139,827 ₃	29
34	^{19}O	8,67	280	9,31	300	144,03	280
35	^{17}F	6,9891	3,8	7,5057	4,1	128,197	26
36	^{18}F	6,176 ₆	9	6,633 ₂	10	137,374 ₉	29
37	^{19}F	4,141 ₉	7	4,448 ₁	7	147,775 ₄	31
38	^{20}F	5,905	9	6,342	10	154,378	32
39	^{19}Ne	7,398 ₂	8	7,945 ₁	9	143,737 ₇	31
40	^{20}Ne	— 1,151 ₅	9	— 1,236 ₇	10	160,653 ₂	34
41	^{21}Ne	0,460	10	0,494	10	167,407	35
42	^{22}Ne	— 1,539	15	— 1,653	16	177,772	37
43	^{23}Ne	1,637	16	1,758	18	182,962	38
44	^{22}Na	1,301	15	1,397	17	174,151	38
45	^{23}Na	— 2,749 ₉	10	— 2,953 ₂	11	186,567 ₆	39
46	^{24}Na	— 1,340 ₈	11	— 1,439 ₉	12	193,524 ₃	40
47	^{25}Na	— 2,12	290	— 2,28	310	194,31	290
48	^{22}Mg	1,343	14	1,443	15	181,693	40
49	^{24}Mg	— 6,855 ₄	12	— 7,362 ₂	13	198,257 ₄	41
50	^{25}Mg	— 5,821 ₈	13	— 6,252 ₂	14	205,589 ₇	42
51	^{26}Mg	— 8,570 ₆	14	— 9,203 ₅	15	216,703 ₇	44
52	^{27}Mg	— 6,641 ₆	14	— 7,132 ₆	15	223,141 ₁	45
53	^{23}Al	— 1,53	50	— 1,65	60	200,52	60
54	^{27}Al	— 9,236 ₅	13	— 9,919 ₃	14	224,954 ₅	45
55	^{28}Al	— 8,594 ₀	14	— 9,229 ₃	15	232,677 ₃	46
56	^{27}Si	— 4,411	16	— 4,737	17	219,348	46
57	^{28}Si	— 13,243	15	— 14,222	16	236,545	48
58	^{29}Si	— 13,349	15	— 14,336	16	243,017	49
59	^{30}Si	— 15,592	16	— 16,745	17	255,63	50
60	^{31}Si	— 13,822	16	— 14,844	18	262,22	50
61	^{28}P	— 0,52	280	— 0,55	300	222,00	290
62	^{30}P	— 11,278	33	— 12,112	36	250,53	60
63	^{31}P	— 15,303	16	— 16,434	18	262,92	50
64	^{32}P	— 14,871 ₇	19	— 15,971 ₂	20	270,85 ₆	50
65	^{32}S	— 16,580 ₆	19	— 17,806 ₃	20	271,78 ₃	50
66	^{33}S	— 16,861	21	— 18,108	23	280,43	60
67	^{34}S	— 19,36	160	— 20,79	170	291,30	170
68	^{35}S	— 18,39 ₁₅₇	80	— 19,75 ₁₂₀	80	298,69 ₁₇₅	90
69	^{35}Cl	— 18,55 ₈₈₈	80	— 19,93 ₆₅₆	80	298,07 ₇₃₁	90
70	^{36}Cl	— 18,75 ₇	80	— 20,14 ₄	90	306,64 ₂	100

Tab. 4. Die ausgeglichenen Massenüberschüsse $M^* \pm m^*$ und die ausgeglichenen Bindungsenergien $E^* \pm e^*$.

mene Ordnung anschließt. Die z_{li} haben, soweit sie von Null verschieden sind, fast immer nur die Werte +1 oder -1, was ihr Schema sehr einfach gestaltet. Da die Geschoßteilchen der Reaktionen immer wiederkehren, sind die ersten 6 Kolonnen für ^1n , ^1H , ^2D , ^3T , ^3He und ^4He ziemlich dicht mit von Null verschiedenen Gliedern besetzt. Im übrigen stehen die

meisten von Null verschiedenen Glieder in der Umgebung der Diagonale des Rechteckes, da Spalt- oder Spallationsprozesse nicht vorkommen.

Als Näherungswerte $M_i^{(0)}$ wurden, soweit dort vorhanden, die Massen von Li et al.⁶ übernommen und die übrigen, wie in Abschnitt 3 angedeutet, aus den Q -Werten mit den kleinsten Fehlern berechnet.

Die Berechnung der $Q_I^{(0)}$ nach Gl. (12) bzw. die der λ_i nach Gl. (14) sind dann einfach Multiplikationen von je einer Zeile bzw. je einer Kolonne des Schemas der α_{li} mit den Werten von $M_i^{(0)}$ bzw. von $(Q_I^{(0)} - Q_I) q_I^{-2}$, wobei das Speicherwerk der Rechenmaschine automatisch die Summation besorgt. Fast ebenso einfach und von einer geübten Rechnerin leicht zu bewältigen ist die Berechnung der einzelnen Glieder der Matrix (a_{ik}) nach Gl. (14). Nur sind hier für jedes a_{ik} mit den Gewichten $1/q_i^2$ jeweils die α -Werte aus zwei verschiedenen, der i -ten und der k -ten Kolonne zu multiplizieren und die Produkte zu summieren. Die Matrix (a_{ik}) hat 70 Zeilen und 70 Kolonnen und ist symmetrisch, d. h. $a_{ik} = a_{ki}$. Sie enthält von Null verschiedene Glieder nur in den ersten 6 Zeilen und Kolonnen sowie in der Umgebung der Diagonale.

Der weitaus komplizierteste Teil der Rechnung ist natürlich die Aufstellung der inversen Matrix (a_{ik}^{-1}) , die die Möglichkeiten unseres Institutes überstieg. Sie wurde für uns in dankenswerter Weise einmal vom Recheninstitut der Technischen Hochschule Darmstadt (Professor WALTHER) mit einer Hollerith-Maschine unter Leitung von Professor UNGER und, nachdem wir einige kleine Änderungen an der Matrix (a_{ik}) vorgenommen hatten, ein zweites Mal vom Max-Planck-Institut für Physik in Göttingen mit der G 2, der größeren der beiden dort aufgestellten elektronischen Rechenmaschinen (Professor BIERMANN), unter Leitung von Dr. JÖRGENS durchgeführt. Die Matrix (a_{ik}^{-1}) ist natürlich ebenfalls symmetrisch. Ebenso wie die a_{ik} haben auch die a_{ik}^{-1} für $i = k$ wechselndes Vorzeichen (herrührend vom wechselnden Vorzeichen der α_{li}) und ihre Größe variiert selbst in der gleichen Zeile oder Kolonne um mehrere Zehnerpotenzen; denn bereits die q_I , aus denen sie letzten Endes entstanden sind, überstreichen einen Bereich von mehr als 3 Zehnerpotenzen. Aber der erste Umstand, der das Rechnen mit ihr viel zeitraubender und komplizierter macht als mit der Matrix (a_{ik}) , ist die Tatsache, daß alle ihre Glieder von Null verschieden sind. Bereits die Berechnung einer einzigen Massenverbesserung, die nach (15)

$$\delta M_i^* = M_i^{(0)} - M_i^* = \sum_k a_{ik}^{-1} \lambda_k \quad (32)$$

beträgt, erfordert die Durchführung von 70 Multiplikationen und die Summation der Produkte. Der zweite für die Rechnung noch gravierendere Umstand ist die hohe erforderliche Stellenzahl beider

Faktoren. Von Göttingen erhielten wir die $35 \cdot 71 = 2485$ voneinander verschiedenen a_{ik}^{-1} mit bis zu 10 geltenden Ziffern angegeben. Auf den ersten Blick frappiert diese hohe Stellenzahl, da ja die q_I nur auf eine oder höchstens zwei Stellen angegeben werden. Sie war aber schon für die Recheninstitute selbst zur Durchführung ihrer Rechenkontrollen notwendig, die in Zeilen- und Kolonnen-Multiplikationen bestanden. Bei der Berechnung der δM_i^* nach (32) waren nun oft sehr kleine a_{ik}^{-1} mit sehr großen λ_k -Werten gepaart und umgekehrt; da ferner die einzelnen Produkte sich im Vorzeichen unterschieden, lief die Summation auf die Differenzbildung zweier fast gleicher großer Zahlen hinaus. Eine genauere Inspektion der inversen Matrix und der λ -Werte ergab, daß bei jedem der beiden Faktoren 4 bis 8 Stellen verlangt werden mußten, damit die Abrundungsfehler die Werte von δM_i^* um weniger als etwa 0,01 keV falschen. Diese Forderung wurde deshalb gestellt, weil der kleinste ausgeglichene Fehler, nämlich der von ${}^3\text{T}(\beta^-) {}^3\text{He}$, $q^* = \pm 0,20$ keV beträgt und durch die Rechnung entstandene Fehler dagegen verschwinden sollten.

Parallel zur Berechnung der δM_i^* , die von den $M_i^{(0)}$ abgezogen sofort die M_i^* ergeben, konnten die ausgeglichenen Fehler m_i^* (die Wurzeln aus den Diagonalgliedern) und q_I^* nach Gl. (17) berechnet werden, da hierfür neben den bekannten stöchiometrischen Koeffizienten nur die Kenntnis der Matrixglieder a_{ik}^{-1} erforderlich ist. Um Benutzern dieses Berichtes die Möglichkeit zu geben, die ausgeglichenen Fehler irgendwelcher gewünschter Linear-kombinationen Q^* der Massen M^* z. B. von massenspektrographischen Dublettwerten, von diversen Bindungsenergien etc. zu berechnen, ist in Tab. 5 die Matrix (a_{ik}^{-1}) in abgekürzter, aber hierfür ausreichender Form wiedergegeben. Unter Beachtung der am Kopf jeder Kolonne angegebenen Zehnerpotenz erhält man jedes Glied in $(\text{keV})^2$. Mit der Angabe der Stellenzahl richteten wir uns nach dem Diagonalglied, meist dem größten in jeder Kolonne auftretenden Glied, das mit 3 Ziffern angeschrieben wurde. Glieder der gleichen Kolonne, die 3 Zehnerpotenzen kleiner sind, verschwinden daher. Diese Genauigkeit der a_{ik}^{-1} genügt zwar für die Berechnung der q^* in den allermeisten Fällen, aber doch nicht immer. Die Matrix (a_{ik}^{-1}) hat nämlich die Eigenschaft, daß die entsprechenden Glieder zweier Zeilen oder Kolonnen immer dann nahezu gleiche Größe haben, wenn sie zwei Nukliden zugeordnet sind, die durch einen

besonders genau bekannten Prozeß miteinander verbunden sind. Das gilt vor allem für die den Paaren $^3\text{T} - ^3\text{He}$, $^7\text{Li} - ^7\text{Be}$ und $^{35}\text{S} - ^{35}\text{Cl}$ zugeordneten Zahlen und Kolonnen; denn $^3\text{T}(\beta^-) ^3\text{He}$, $^7\text{Li}(\text{p},\text{n}) ^7\text{Be}$ und $^{35}\text{S}(\beta^-) ^{35}\text{Cl}$ sind die einzigen Prozesse, die in den Ausgleich mit einem Fehler q_1 unter 1 keV eingegangen sind. Während z. B. die Massen von ^{35}S und von ^{35}Cl jede nur mit einem ausgeglichenen

Fehler $m^* = \pm 76$ keV errechnet werden können, war ihre Differenz aus dem β -Zerfall $^{35}\text{S}(\beta^-) ^{35}\text{Cl}$ schon vor dem Ausgleich mit einem Fehler von nur $q = \pm 0,4$ keV bekannt. Nach Gln. (17) und (18) ist nun das Quadrat des ausgeglichenen Fehlers der Differenz $^{35}\text{S} - ^{35}\text{Cl}$ gegeben durch

$$m^{*2}({}^{35}\text{S}) + m^{*2}({}^{35}\text{Cl}) - 2 a^{-1}({}^{35}\text{S}, {}^{35}\text{Cl}), \quad (33)$$

d. h. von der Summe der beiden Fehlerquadrate

	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}	10^{-15}	10^{-16}	10^{-17}	10^{-18}	10^{-19}	10^{-20}	10^{-21}	10^{-22}	10^{-23}	10^{-24}	10^{-25}	10^{-26}	10^{-27}	10^{-28}	10^{-29}	10^{-30}	10^{-31}	10^{-32}	10^{-33}	10^{-34}	10^{-35}	10^{-36}	10^{-37}	10^{-38}	10^{-39}	10^{-40}	10^{-41}	10^{-42}	10^{-43}	10^{-44}	10^{-45}	10^{-46}					
^{13}C	24	144																																																	
^{14}C	25	68	860																																																
^{13}N	26	143	706	200																																															
^{14}N	27	61	765	65	764																																														
^{15}N	28	114	596	122	548	176																																													
^{16}N	29	97	582	102	536	139	156																																												
^{11}O	30	62	765	65	764	55	0	155																																											
^{15}O	31	114	602	121	555	174	0	1	418																																										
^{17}O	32	24	229	27	215	20	0	0	20	133																																									
^{18}O	33	91	422	93	374	147	0	0	145	32	741																																								
^{19}O	34	27	96	27	75	45	0	0	45	53	171	783																																							
^{17}F	35	23	223	30	212	17	0	0	18	55	17	0	144																																						
^{18}F	36	87	395	96	355	137	0	0	135	33	687	0	21	795																																					
^{19}F	37	28	97	28	77	45	0	0	44	53	170	0	20	189	428																																				
^{20}F	38	48	281	50	247	65	0	0	65	67	214	0	35	236	422	851																																			
^{19}Ne	39	30	102	38	87	45	0	0	44	53	165	0	23	192	427	419	677																																		
^{20}Ne	40	45	11	46	- 15	92	0	0	90	25	458	0	2	524	304	360	305	900																																	
^{21}Ne	41	55	150	56	115	95	0	0	94	43	411	0	17	465	340	393	338	775	906																																
^{22}Ne	42	75	359	78	309	111	0	0	110	62	424	0	35	475	348	421	344	762	906	212	214	237																													
^{23}Ne	43	95	573	100	509	128	0	1	127	82	440	0	54	487	355	445	350	754	914	215	268																														
^{22}Na	44	75	359	78	309	111	0	0	110	62	424	0	35	474	348	421	344	762	906	212	214	237																													
^{23}Na	45	53	- 1	52	- 40	108	0	0	106	28	483	0	4	544	327	386	325	925	823	81	81	105																													
^{24}Na	46	68	151	68	101	122	0	0	120	43	498	0	17	556	335	406	331	923	833	84	85	84	106	129																											
^{25}Na	47	169	72	113	129	0	0	127	45	509	0	18	565	341	415	335	933	845	85	87	85	107	127																												
^{22}Mg	48	55	4	61	- 30	108	0	0	106	28	478	0	8	547	326	383	331	926	821	81	80	81	105	105																											
^{21}Mg	49	55	4	61	- 30	108	0	0	106	28	478	0	8	547	326	383	331	926	821	81	80	81	105	105																											
^{20}Mg	50	63	90	62	42	119	0	0	117	38	497	0	12	556	335	402	331	930	835	84	84	84	106	127																											
^{25}Mg	50	76	195	75	138	131	0	0	129	47	508	0	20	566	341	416	335	931	843	85	87	85	107	126																											
^{26}Mg	51	70	100	68	44	132	0	0	129	42	517	0	15	574	349	421	343	952	861	87	87	87	110	130																											
^{27}Mg	52	86	242	84	175	145	0	0	143	55	530	0	26	584	355	437	347	949	868	88	91	88	110	131																											
^{25}Al	53	86	302	93	245	135	0	0	134	56	506	0	33	570	340	421	342	922	839	86	86	86	105	127																											
^{27}Al	54	73	91	70	30	137	0	0	135	43	527	0	15	582	355	428	348	964	873	88	89	88	111	133																											
^{28}Al	54	73	12	70	- 46	139	0	0	137	36	532	0	10	591	360	428	357	982	885	88	89	88	114	134																											
^{30}P	62	94	197	93	121	161	0	0	158	54	556	0	26	610	373	456	367	987	903	92	94	92	115	137																											
^{31}P	63	86	77	79	0	161	0	0	158	45	566	0	15	615	380	457	369	1009	919	93	94	93	118	140																											
^{32}P	65	107	291	101	199	178	0	0	175	64	581	0	33	627	387	480	374	1000	926	95	98	95	117	140																											
^{31}Si	60	2	116	159	158	166	169	16	172	190	171	216	219	235	267	202	215	802	209	214	241	241	10^2																												
^{28}P	61	2	113	155	153	161	162	15	166	183	166	229	213	209	215	802	209	214	241	241	10^2																														
^{30}P	62	2	114	157	156	164	167	16	169	186	169	212	221	224	227	2	23	266	226	226	226	226	10^2																												
^{31}P	63	2	117	160	159	167	170	16	173	190	172	223	223	228	247	2	23	267	232	232	232	232	10^2																												
^{32}P	64	2	116	160	160	168	172	16	174	192	173	223	224	229	249	2	23	267	343</																																

(die nur dann das Fehlerquadrat der Differenz ergeben würden, wenn die beiden Massen allein und unabhängig voneinander gemessen worden wären) ist noch das praktisch gleich große Korrelationsglied abzuziehen. Selbst wenn wir bei jedem der 3 in (33) auftretenden Matrixglieder 4 Ziffern berücksichtigen, ergibt sich noch immer für das Fehlerquadrat von $^{35}\text{S}(\beta^-) ^{35}\text{Cl}$ der Wert Null, was keinen Sinn hat. Erst wenn wir 6 Ziffern mitschleppen, ergibt sich 0,16 (keV)² und damit noch nicht einmal eine geringfügige Erniedrigung des ausgeglichenen Fehlers gegenüber dem oben erwähnten von $\pm 0,4$ keV.

Jeder ausgeglichene Fehler q_I^* in Tab. 3 muß ja stets unter dem Wert von q_I liegen, wenn auch manchmal nur um einen geringen Betrag; denn jeder ausgeglichene Wert Q_I^* setzt sich ja aus mehr Informationen zusammen als nur dem Eingangswert Q_I . Diese Tatsache und der schon gegen Schluß des Abschnittes 4 erwähnte Vergleich der Kolonnen für $v_I/|q_I|$ und für l_o in Tab. 3 geben uns die ersten Möglichkeiten, die Richtigkeit der Aufstellung der inversen Matrix zu kontrollieren. Beim ersten Darmstädter Versuch, der uns freundlicherweise geliefert wurde, bevor noch vom Recheninstitut selbst alle Rechenkontrollen durchgeführt waren und der auf viel weniger Stellen als die Göttinger Umkehrung gerechnet worden war, ergaben sich dadurch nützliche Hinweise, in welchen Teilen der inversen Matrix noch nach Rechenfehlern gesucht werden mußte. Die wichtigste und umfangreichste Kontrolle konnte jedoch erst nach Berechnung der δM_i^* vorgenommen werden. Die Auflösung von (32) ergibt ja

$$\lambda_i = \sum_k a_{ik} \delta M_k^*. \quad (34)$$

Der Vergleich der nun durch Einsetzen der erhaltenen δM^* in (34) gewonnenen λ_i mit den nach Gl. (14) berechneten Werten kontrolliert sehr empfindlich sowohl die Bildung der inversen Matrix (a_{ik}^{-1}) aus der Matrix (a_{ik}) als auch die Berechnung der δM_i^* aus den a_{ik}^{-1} und den λ_i . Diese Probe zeigte, daß die M_i^* auf besser als etwa 0,01 keV richtig gerechnet worden waren.

Mit der Berechnung der δM_i^* , der q_I^* und der Durchführung der eben erwähnten Probe, die zusammen mehrere, anfangs ungeübte Rechnerinnen an Tischrechenmaschinen durch fast ein viertel Jahr beschäftigte, war der weitaus größte Teil der rechnerischen Arbeit geleistet. Die Berechnung der übrigen, in den Spalten der Tab. 3 und 4 angegebenen

Größen inkl. der Bindungsenergien $E_i^* \pm e_i^*$ der Nuklide gegenüber den Nukleonen ist dann schnell erledigt. Zu erwähnen ist noch, daß für die Umrechnung der Massen von MeV in mME der von DuMOND und COHEN⁴ angegebene Umrechnungsfaktor 1 mME = 0,931 162 MeV benutzt wurde, dessen Fehler hier vernachlässigt werden konnte.

6. Ergebnisse der Ausgleichsrechnung und Vergleich mit massenspektrographischen Messungen

In den Tab. 3 und 4 sind die ausgeglichenen Fehler q_I^* , m_i^* bzw. e_i^* wie üblich auf zwei Stellen abgerundet, wenn die erste (von Null verschiedene) Ziffer 1 bis 4 beträgt, und auf eine Stelle, wenn sie 5 bis 9 ist. In Tab. 3 wurden die ausgeglichenen Werte Q_I^* auf die Dezimalstelle aufgerundet, die der letzten geltenden Stelle des zugehörigen Fehlers q_I^* entspricht. Bei den Werten M_i^* bzw. E_i^* von Tab. 4 wurde zwar nach der gleichen Regel verfahren; doch mußten dort in tiefgestelltem Kleindruck in vielen Fällen noch 1 bis 3 weitere Stellen angegeben werden, um die Werte Q_I^* von Tab. 3 bis zu der oben angegebenen Stelle berechnen zu können. Denn Linearerkombinationen der M_i^* bzw. der E_i^* , insbesondere manche ihrer Differenzen, sind oft viel genauer bekannt als die Massen bzw. die Bindungsenergien selbst. Das wurde bereits im vorigen Abschnitt am Beispiel des β^- -Zerfalls von ^{35}S besprochen. Hätten wir dem ausgeglichenen Fehler m^* von 80 keV entsprechend die Massen von ^{35}S bzw. von ^{35}Cl mit $-18,39$ MeV bzw. mit $-18,56$ MeV angegeben, so könnte daraus die gesamte Zerfallsenergie von ^{35}S nur auf zwei Stellen zu 0,17 MeV berechnet werden. Aus den Angaben in Tab. 4 läßt sich jedoch mit Hilfe der drei tiefgestellten Ziffern der ausgeglichenen Wert dieser Zerfallsenergie zu 0,16701 MeV angeben entsprechend dem ausgeglichenen Fehler von 0,40 keV.

Nach Gl. (26) ist für das GAUSSSCHE Minimum der Wert $r = 126$ zu erwarten, wenn, wie dies hier geschehen ist, die Gewichtskonstante $C = 1$ gesetzt wird. Die Summe der Quadrate der Werte von Spalte 7 in Tab. 3 ergibt den etwas höheren Wert $\sum_{I=1}^{196} v_I^2 q_I^{-2} = 176,19$. Wie am Schluß von Abschnitt 4 ausgeführt wurde, entsprechen den Werten $v_I/|q_I|$ in vielen Fällen die Werte l_o der Bedingungen (22),

und es sei hier angemerkt, daß schon der Vorausgleich für die analoge Quadratsumme den ganz ähnlichen Wert $\sum_{q=1}^{126} l_q^2 = 166,52$ ergeben hatte. Für das wichtige Verhältnis R_e/R_i des auf die Gewichtseinheit bezogenen Fehlers nach dem Ausgleich zum Fehler vor dem Ausgleich wäre nach den Ausführungen von Abschnitt 3 der Wert $1 \pm (1/2r)^{1/2} = 1 \pm 0,06$ zu erwarten. Nach Gl. (28), die unter der Voraussetzung gelten sollte, daß unter den q_l mittlere Fehler gemeint sind, ergibt sich der etwas zu hohe Wert $R_e/R_i = 1,18$, während Gl. (28 a), die dann anzuwenden wäre, wenn die q_l als wahrscheinliche Fehler aufzufassen sind, den etwas zu niedrigen Wert $R_e/R_i = 0,80$ liefert. Daraus ist zu schließen, daß im Durchschnitt die Angaben der verschiedenen Autoren einem Fehler entsprechen, der zwischen dem mittleren und dem wahrscheinlichen Fehler liegt. Das ist vollkommen im Einklang mit dem, was wir bereits in Abschnitt 4 aus dem Vorausgleich, nämlich aus der Verteilung der l -Werte der $r = 126$ Bedingungsgleichungen (s. Abb. 2) geschlossen hatten. Man könnte nun sämtliche Fehlerangaben (unausgeglichene wie ausgeglichenen) der Tab. 3 und 4 mit dem Faktor 1,18 bzw. 0,80 multiplizieren, um Intervalle zu erhalten, die dem entsprechen, was man unter dem mittleren bzw. dem wahrscheinlichen Fehler versteht. Wir haben dies unterlassen, so daß die hier angegebenen ausgeglichenen Fehler eben dem Intervall entsprechen, das offenbar im Durchschnitt von den verschiedenen Beobachtern als „Fehler“ empfunden wird.

Analog zu den Ausführungen in Abschnitt 4 und

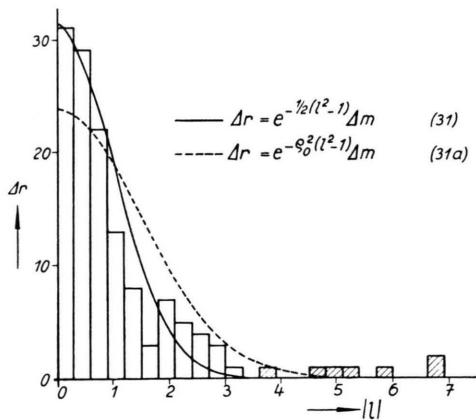


Abb. 2. Verteilung der r Zyklenwerte $|l|$. Δr = Anzahl der Zyklen mit l -Werten zwischen $|l|$ und $|l|+0,3$ (angezeigt durch die Höhe der Rechtecke), Δm = Anzahl der Zyklen mit l -Werten zwischen 0,85 und 1,15.

der Darstellung von Abb. 2 kann man auch die Verteilung der N Werte $|v_l/q_l|$ untersuchen, indem man überall $|l|$ durch $|v/q|$ und r durch N ersetzt. Im Gegensatz zu früher ist aber jetzt keine normale (GAUSSSche) Verteilung zu erwarten, denn die N Beobachtungsdaten Q bzw. ihre ausgeglichenen Werte Q^* sind nicht voneinander linear unabhängig, wie es die r Bedingungsgleichungen waren; der in Abschnitt 4 durchgeföhrte Vergleich trifft also hier nicht zu und die Verteilung kann nicht durch das Wahrscheinlichkeitsintegral gegeben sein. In der Tat zeigt nun das Histogramm von Abb. 3 eine sehr starke Abweichung von den mit $\Delta m = 20$ berechneten Kurven, gleichgültig, ob man unter den q_l die mittleren oder die wahrscheinlichen Fehler versteht.

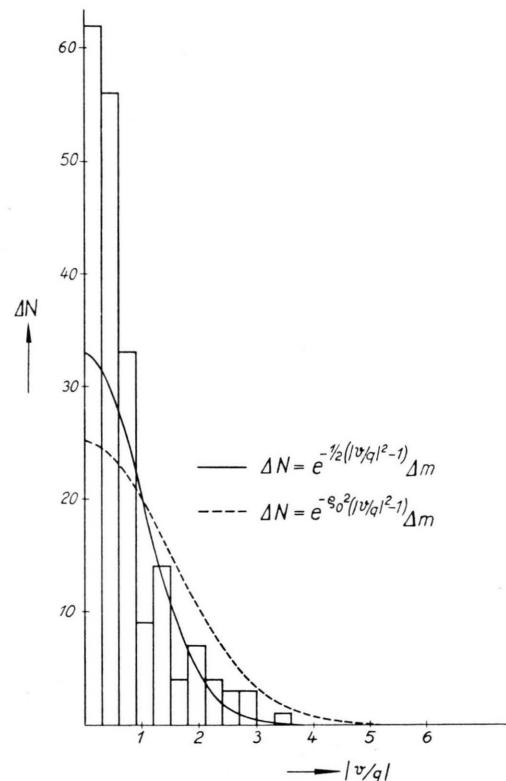


Abb. 3. Verteilung der N Werte $|v/q|$ der Tab. 3.
 ΔN = Anzahl der Beobachtungsdaten mit $|v/q|$ -Werten zwischen $|v/q|$ und $|v/q|+0,3$ (angezeigt durch die Höhe der Rechtecke), $2 \Delta m$ = Anzahl der Beobachtungsdaten mit $|v/q|$ -Werten zwischen 0,7 und 1,3.

Es ist interessant zu beobachten, daß der Ausgleich entsprechend der GAUSSSchen Forderung (10) so arbeitet, daß er in der überwiegenden Anzahl der Fälle die Werte $|v/q|$ in die dem Ursprung am nächsten liegenden Intervalle preßt.

Einen Überblick über die Änderung der ausgewogenen Fehler mit der Massenzahl A geben die

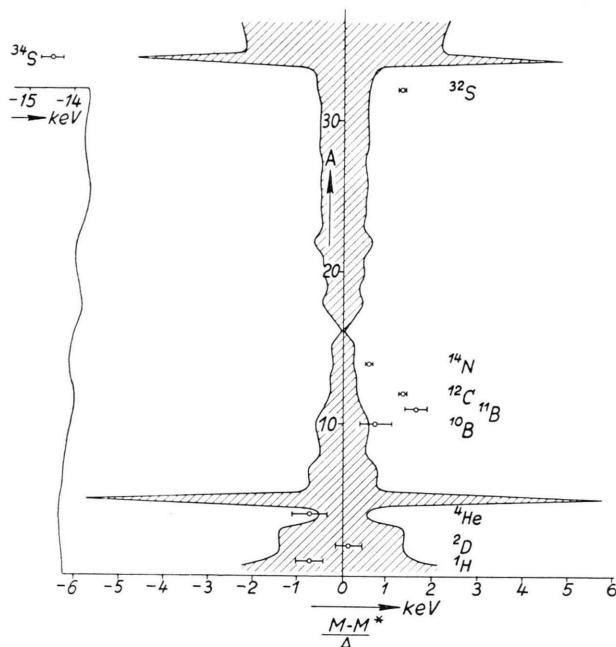


Abb. 4. Das schraffierte Gebiet zeigt den Verlauf des Fehlers $\pm m^*/A$ des Packungsanteils M^*/A mit der Massenzahl A . Die Differenzen $(M - M^*)/A$ von massenspektroskopisch bestimmten Massen M gegenüber den Ausgleichswerten M^* aus kernphysikalischen Daten sind als kleine Kreise einge tragen. Die durch abgegrenzte Strecken angedeuteten Fehler sind die der massenspektroskopischen Messung, also m/A .

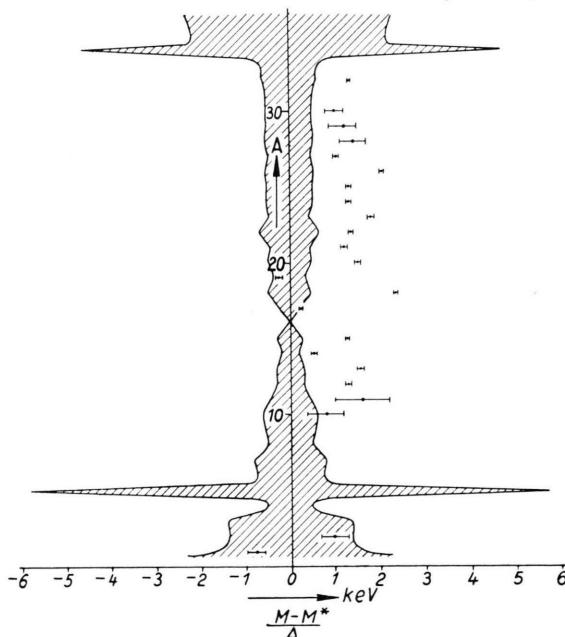


Abb. 4 a. Analog zu Abb. 4, siehe Anmerkung bei der Korrektur auf S. 548.

schraffierten Gebiete der Abb. 4 und 5, die das Fehlerintervall des Packungsanteils M^*/A und der Bindungsenergie pro Nukleon E^*/A andeuten sollen. Da die Fehler bei isobaren Nukliden oft sehr stark verschieden sind, wurde für die Zwecke der beiden Figuren für jede Massenzahl das Nuklid mit dem kleinsten Fehler m^* bzw. e^* gewählt. Es ist fast immer das stabile, was leicht verständlich ist, da dieses der Messung leichter zugänglich ist als die instabilen Isobare. Ausnahmen davon sind nur die Massenzahlen $A=5$ und $A=8$, für die es keine stabilen Nuklide gibt und für die die Wahl auf ${}^5\text{He}$ und ${}^8\text{Be}$ fiel, sowie $A=36$, die in unserem System von 70 Massen nur durch das instabile ${}^{36}\text{Cl}$ vertraten ist.

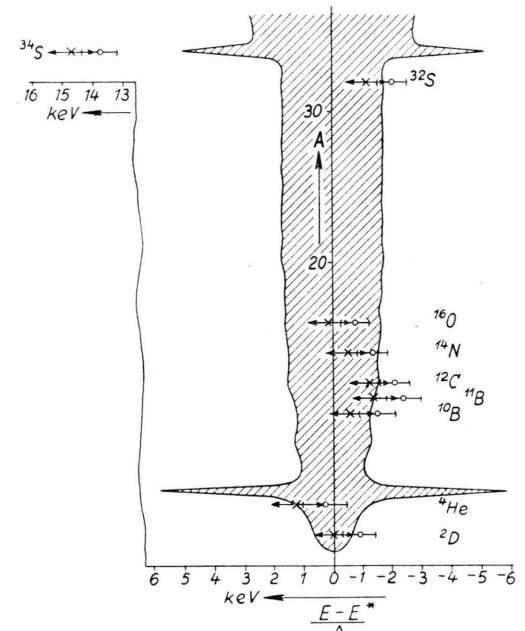


Abb. 5. Das schraffierte Gebiet zeigt den Verlauf des Fehlers $\pm e^*/A$ der Bindungsenergie pro Nukleon E^*/A mit der Massenzahl A .

Die Differenzen $(E - E^*)/A$ von Bindungsenergien E , die nach zwei verschiedenen Voraussetzungen über die Masse des Neutrons aus neueren massenspektroskopischen Messungen berechnet wurden, gegenüber den Werten E^* des Ausgleichs aus kernphysikalischen Daten sind als kleine Kreise bzw. als Kreuze eingetragen.

Beginnen wir mit Abb. 5, so bemerken wir, daß der Fehler e^*/A der Bindungsenergie pro Nukleon von $A=1$, wo er definitionsgemäß verschwindet, sich mit wachsendem A sehr rasch einem konstanten Wert ($\pm 1,6$ keV) nähert. Die Begrenzung des schraffierten Gebietes zeigt dabei wenig Profilierung mit Ausnahme von zwei auffallenden Spitzen für

${}^5\text{He}$ und für ${}^{34}\text{S}$ sowie einer durch ${}^{35}\text{Cl}$ und ${}^{36}\text{Cl}$ verursachten Verbreiterung. Diese Einzelheiten sind leicht zu verstehen. Nach Gl. (2) ist

$$E_i^*/A_i \approx \frac{1}{2}({}^1\text{n}^* + {}^1\text{H}^*) - M_i^*/A_i,$$

wobei wir für die folgende Fehlerberechnung das Glied $T_{\xi i}({}^1\text{n}^* - {}^1\text{H}^*)/A_i$ völlig vernachlässigt haben. Bei der Berechnung des Fehlerquadrates von E^*/A nach Gl. (17) spalten wir, ähnlich wie bei Gl. (33), in die beiden Fehlerquadrate und das Korrelationsglied auf, indem wir schreiben:

$$(e_i^*/A_i)^2 = q^{*2} + (m_i/A_i)^2 - K_i.$$

Dabei sind die Abkürzungen

$$q^{*2} = \frac{1}{4}(a_{11}^{-1} + a_{22}^{-1} + 2a_{12}^{-1}) \quad \text{und} \quad K_i = (a_{1i}^{-1} + a_{2i}^{-1})/A_i$$

eingeführt. Gegenüber $q^{*2} = 2,54 \text{ (keV)}^2$ sind in der Regel die beiden anderen Glieder zu vernachlässigen. $q^* = \pm 1,6 \text{ keV}$ bestimmt den oben erwähnten konstanten Wert von e^*/A und stellt den Fehler von $\frac{1}{2}({}^1\text{n}^* + {}^1\text{H}^*)$, d. i. nach Gl. (5) der Fehler der Bindungsenergie pro Nukleon beim Standard ${}^{16}\text{O}$, dar. Nur wenn $m_i^{*2} = a_{ii}^{-1}$ sehr groß ist, wenn also die Masse des Nuklids sehr schlecht bestimmt ist, dann kann der im allgemeinen konstante Wert von $(e^*/A)^2$ durch das zweite Glied merklich vergrößert werden. An Hand von Abb. 1 und Tab. 3 kann man feststellen, daß ${}^5\text{He}$ und ${}^{34}\text{S}$, aber auch noch ${}^{35}\text{Cl}$ und ${}^{36}\text{Cl}$ mit Nukliden von benachbarter Massenzahl nur durch ungenau bekannte Reaktionen verbunden sind. Ihre Q -Werte sind nämlich mit Fehlern q_1 angegeben, die groß sind gegenüber den Fehlern der Q -Werte, die zur Berechnung der Massen dieser Nachbarnuklide dienen. Zum Beispiel ist ${}^{34}\text{S}$ mit ${}^{33}\text{S}$ nur durch zwei Reaktionen verbunden, deren Q -Werte Fehler von 200 und 250 keV haben, während die Q -Werte der beiden von ${}^{32}\text{S}$ zu ${}^{33}\text{S}$ führenden Reaktionen nur mit Fehlern von 11 und 20 keV behaftet sind. In der Tat weisen die genannten 4 Nuklide, die in Abb. 5 durch die von ihnen gebildeten Spitzen bzw. durch die Verbreiterung des sonst konstanten Fehlerintervales auffallen, Werte von a_{ii}^{-1} auf, die um 2 bis 4 Zehnerpotenzen größer sind, als die Glieder der beiden ersten Kolonnen der inversen Matrix. Das Korrelationsglied K_i , das in der Regel das Fehlerquadrat verkleinert, spielt nur bei sehr kleinen Werten von

A eine Rolle. Es bewirkt, daß bei Nukliden leichter als ${}^{16}\text{O}$ der Fehler allmählich kleiner wird, bis er bei ${}^2\text{D}$ den Wert $e^*/A = \pm 0,6 \text{ keV}$ erreicht.

Das schraffierte Gebiet von Abb. 4, das dem Verlauf des Fehlers m^*/A des Packungsanteils mit der Massenzahl A darstellt, bietet in mancher Beziehung ein etwas anderes Bild. Von den schon besprochenen 4 Nukliden mit herausfallend großen m^* -Werten, die hier ähnliches bewirken wie in Abb. 5, sehen wir dabei ganz ab. Der Fehler des Packungsanteils ist im allgemeinen beträchtlich kleiner als der Fehler der Bindungsenergie pro Nukleon, da ja der das Bild von Abb. 5 beherrschende Fehler von $\frac{1}{2}({}^1\text{n}^* + {}^1\text{H}^*)$ hier nicht auftritt. Beginnend von ${}^{16}\text{O}$, wo der Fehler des Packungsanteils definitionsgemäß gleich Null ist, steigt m^*/A mit fallendem A etwa proportional an, um bei ${}^1\text{H}$ den Wert $\pm 1,7 \text{ keV}$ zu erreichen, der praktisch mit dem Wert des Fehlers q^* von Abb. 5 übereinstimmt. Die Profilierung des schraffierten Gebietes ist aber hier viel ausgesprochener. Es fallen besonders die Einschnürungen bei ${}^2\text{D}$, ${}^4\text{He}$ und ${}^8\text{Be}$ auf. Die Massen der ersten beiden Nuklide sind durch zahlreiche genau gemessene (d, α)-Reaktionen sehr gut bekannt. Aber auch zu ${}^8\text{Be}$ führen einige mit hoher Präzision gemessene Reaktionen und es ist vor allem mit ${}^4\text{He}$ durch seinen sehr gut bekannten Zerfall in zwei α -Teilchen verbunden. Für Nuklide mit $A > 16$ etwa bis ${}^{33}\text{S}$ (auch hier könnte man die Profilierung näher begründen) erreicht m^*/A bald einen praktisch konstanten Wert, d. h. der hier allmählich wachsende Fehler der Q -Wertmessung wird durch den Faktor $1/A$ ungefähr kompensiert.

Für den im folgenden durchzuführenden Vergleich unserer aus kernphysikalischen Daten (Q_r - und Q_β -Werten) gewonnenen ausgeglichenen Massen mit solchen aus massenspektrographischen Dublettmesungen (Q_m -Werten), wurden von den letzteren nur diejenigen Messungen berücksichtigt, die seit Erscheinen des Berichtes III gemacht worden sind. Denn wegen der schon erwähnten und seit längerer Zeit bekannten Diskrepanzen war zu erwarten, daß in der Zwischenzeit weitere Anstrengungen gemacht worden waren, um systematische Fehler bei massenspektroskopischen Messungen möglichst auszuschalten. Es handelt sich hier um die Messungen von SCOLMAN, QUISENBERY und NIER¹³, von SMITH¹⁴ und von SCHIERSTEDT, EWALD, LIEBL und SAUER-

¹³ T. T. SCOLMAN, K. S. QUISENBERY u. A. O. NIER, Phys. Rev. **100**, 1245, abs. E 10 u. E 11 [1955].

¹⁴ LINCOLN G. SMITH, Phys. Rev., im Druck.

MANN¹⁵, die in Tab. 6 mit $Q \pm q$ bezeichnet in den Kolonnenpaaren (5, 6), (7, 8) und (9, 10) von $I=1$ bis 15 numeriert zusammengefaßt sind. Zum Vergleich sind im Kolonnenpaar (3, 4) die aus den ausgeglichenen Massen von Tab. 4 berechneten Werte $Q^* \pm q^*$ dieser Massendifferenzen eingetragen. Der zweite Teil von Tab. 6 enthält entsprechend die aus den Meßwerten jeder Arbeit berechenbaren massenspektrographischen Massenüberschüsse $M \pm m$ und zum Vergleich auch wieder unsere ausgeglichenen Werte $M^* \pm m^*$ aus Tab. 4.

Zu den Eintragungen in Tab. 6 ist noch einiges zu bemerken. Die in der Arbeit von NIER et al.¹³ angegebenen Meßwerte, durch die die in ihnen enthaltenen Massen stark überbestimmt sind, wurden von WAPSTRA^{*} einem Ausgleich unterworfen. Obwohl dieser Ausgleich $R_e/R_i = 4,1$ statt des Erwartungswertes $1 \pm 0,2$ lieferte und daher, wie WAPSTRA hervorhebt, offenbar wegen vonhandener systematischer Fehler oder Überschätzung der Meßgenauigkeit nicht ganz berechtigt war, wurden in Tab. 6 die WAPSTRASchen Ausgleichswerte aufgenommen, weil anders ein eindeutiger Vergleich nicht möglich wäre. Die von WAPSTRA ausgeglichenen Werte unterscheiden sich von den von NIER et al.¹³ angegebenen durch einen meist größeren Fehler, da, wie in einem solchen Falle üblich, die ausgeglichenen Fehler mit R_e/R_i multipliziert wurden. Die Unterschiede bei den M -Werten sind stets kleiner als dieser Fehler. Die Massendifferenz Q_{12} wurden von NIER et al. nicht direkt gemessen, sondern ergibt sich zwangslässig aus den ausgeglichenen Massen. Bei SMITH¹⁴ wurden zur Erleichterung des Vergleiches die Massendifferenzen Q_6 , Q_{11} , Q_{12} und Q_{14} aus den übrigen direkt gemessenen Dublettewerten berechnet. Von den letzteren wurden von uns 3 mit Hilfe der Bedingungsgleichung $2Q_3 - Q_4 + Q_5 = 0$ ausgeglichen, was die Meßwerte jedoch nur um Bruchteile des angegebenen Fehlers veränderte. Von EWALD et al.¹⁵ wurden je 2 bis 3 zeitlich auseinander liegende Serien der Dubletts Q_4 , Q_7 , Q_8 und Q_9 gemessen. Die Angaben von Tab. 4 stellen von uns daraus gebildete gewichtete Mittelwerte dar, die sich aber von den von EWALD et al.¹⁵ angegebenen Mitteln praktisch nur durch eine etwas kleinere Fehlerangabe unterscheiden. Daraus wurden die restlichen 3 Massendifferenzen dieser Spalte berechnet.

¹⁵ G. v. SCHIERSTEDT, H. EWALD, H. LIEBL u. G. SAUERMANN, Z. Naturforsch. **11a**, 216 [1956].

* A. H. WAPSTRA, briefliche Mitteilung. Wir möchten auch

Ein Vergleich der Eintragungen in den Spalten für NIER et al. und für SMITH zeigt eine ganz erstaunliche Übereinstimmung weit innerhalb der sehr kleinen Fehlerangaben bei allen Q - und M -Werten, die von beiden Autoren gemessen wurden. Diese Übereinstimmung der Meßergebnisse ist um so wertvoller, als sie bekanntlich mit ganz verschiedenen Methoden gewonnen wurden – in Minneapolis in dem neuen von NIER entwickelten großen doppel-fokussierenden Massenspektrometer und in Brookhaven in dem neuartigen Massensynchronometer von SMITH. Sie unterscheiden sich jedoch in vielen Einzelheiten von den Ergebnissen unseres Ausgleichs aus kernphysikalischen Daten. Um die Übereinstimmung bzw. die Diskrepanz der massenspektroskopischen Werte M mit den Massen M^* unseres Ausgleichs anschaulich zum Ausdruck zu bringen, wurden in Abb. 4 als kleine Kreise die Differenzen $(M - M^*)/A$ eingetragen, um die sich die massenspektroskopischen Packungsanteile M/A von den Werten M^*/A des Ausgleichs unterscheiden. Die durch abgegrenzte Strecken angedeuteten Fehler sind die der massenspektroskopischen Messung, also m/A . Dazu wurden für ^1H , ^2D , ^{12}C , ^{14}N und ^{32}S gewichtete Mittelwerte aus den Ergebnissen beider Autoren benutzt, während für ^4He , ^{10}B und ^{11}B SMITH allein verantwortlich ist. Es fällt auf, daß bei den 3 leichtesten Nukliden, von denen ^1H und ^4He negative Differenzen zeigen, Übereinstimmung herrscht; die schweren Nuklide weisen durchwegs positive Differenzen auf, und von ^{11}B an ist die Diskrepanz gegenüber dem schraffierten Gebiet merklich ausgeprägt. Da bei den meisten massenspektroskopisch gemessenen Nukliden $T_z = 0$ ist, kann man keinesfalls daran denken, die Diskrepanz dadurch zu beheben, daß man die Ausgleichswerte M^* durch Einführung einer von Null verschiedenen Neutrino-masse ändert. Auch ein Fehler im Umrechnungsfaktor kann nicht die Schuld tragen, da die Diskrepanzen $(Q - Q^*)$ der stets positiv geschriebenen Dublettewerte durchaus nicht das gleiche Vorzeichen haben.

Für die Nuklide ^1H , ^{12}C und ^{32}S folgen aus der Spalte für EWALD et al. für die Differenzen $(M - M^*)/A$ in keV die Werte $-3,9 \pm 2,0$, $+0,57 \pm 0,38$ und $+1,5 \pm 0,6$, die mit den in Abb. 4 eingetragenen Mittelwerten $-0,74 \pm 0,32$,

hier Herrn Dr. WAPSTRA herzlich für die Erlaubnis danken, die Resultate seiner Ausgleichsrechnung benutzen zu dürfen.

$+1,35 \pm 0,08$ und $1,30 \pm 0,06$ aus den Spalten für NIER et al. und für SMITH zu vergleichen sind. Die von EWALD wiederholt betonte Übereinstimmung seiner ^{12}C -Masse mit kernphysikalischen Messungen scheint uns also durch eine herausfallend kleine Masse von ^1H erkauft zu sein, während die Differenz bei ^{32}S eher größer geworden ist. Die neuen Messungen der Münchener Gruppe, bei denen große Sorgfalt auf die Vermeidung systematischer Fehler gelegt wurde, scheinen demnach einen im selben Sinne verlaufenden Gang gegenüber den Werten aus kernphysikalischen Daten zu zeigen, wie die mit merklich kleinerem Fehler angegebenen Messungen der amerikanischen Autoren. Dementsprechend zeigt auch die von EWALD et al.¹⁵ selbst berechnete Massendifferenz Q_{12} , die im Gegensatz zu Q_4 die Massen von ^1H und ^{12}C nicht im gleichen Term enthält, praktisch die gleiche Diskrepanz zu den kernphysi-

kalischen Ausgleichsdaten, wie die Werte der amerikanischen Autoren. In der Arbeit von EWALD et al.¹⁵ wird allerdings so verfahren, daß aus Q_{12} mit Hilfe eines Wertes $^1\text{H} = (8,144 \pm 0,001)$ mME, der als Mittelwert von Messungen anderer Autoren gewonnen wird und somit mit dem Wert der amerikanischen Autoren in unserer Tab. 6 übereinstimmt, $^{12}\text{C} = (3,812 \pm 0,006)$ mME berechnet wird. Damit erhält man aber $Q_4 = (36,388 \pm 0,007)$ mME in recht guter Übereinstimmung mit den Werten der amerikanischen Autoren, während EWALD et al.¹⁵ erneut die gute Übereinstimmung ihres neuen niedrigen Meßwertes von Q_4 mit früheren eigenen Messungen betonen. Es ist somit nicht klar, warum dieser Wert nicht zur Berechnung von ^1H herangezogen wurde.

Für ^{34}S enthält Tab. 6 nur die Neumessung von EWALD et al. Die in Abb. 4 eingetragene Differenz

I	Dublett	Ausgeglichene Werte		NIER et al. ¹⁾		SMITH		EWALD et al.	
		Q^* (mME)	q^* (μME)	Q (mME)	q (μME)	Q (mME)	q (μME)	Q (mME)	q (μME)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	($^1\text{H}_2 - ^2\text{D}$)	1,5515	1,6	1,5498	0,4	1,5491	0,4		
2	($^2\text{D}_2 - ^4\text{He}$)	25,6021	4,4			25,6090	0,5		
3	($^{12}\text{C}^1\text{H}_2 - ^{14}\text{N}$)	12,572	5	12,5789	0,8	12,5791 ²⁾	0,8		
4	($^{12}\text{C}^1\text{H}_4 - ^{16}\text{O}$)	36,380	9	36,3941	1,3	36,3948 ²⁾	1,5	36,3714 ³⁾	4,4
5	($^{14}\text{N}_2 - ^{12}\text{C}^{16}\text{O}$)	11,236	5	11,2363	1,4	11,2367 ²⁾	1,5		
6	($^{14}\text{N}^1\text{H}_2 - ^{16}\text{O}$)	23,808	6	23,8152	1,1	23,8157 [*]	1,3		
7	($^{16}\text{O}_2 - ^{32}\text{S}$)	17,806	20	17,7613	3,2	17,7616	2,4	17,754 ³⁾	6
8	($^{32}\text{S}^1\text{H}_2 - ^{34}\text{S}$)	19,28	170					19,851 ³⁾	8
9	($^{12}\text{C}_3 - ^{34}\text{S}^1\text{H}_2$)	15,90	170					16,466 ³⁾	7
10	($^{12}\text{C}_4 - ^{32}\text{S}^{16}\text{O}$)	33,006	24	33,0305	3,1	33,0308	7,2	32,968 [*]	11
11	$^{1/2}(^{12}\text{C}_4 - ^{16}\text{O} - ^{32}\text{S}_2)$	25,406	21	25,3959	2,6	25,3962 [*]	3,8	25,370 [*]	6
12	($^{16}\text{O}_2^1\text{H}_4 - ^{12}\text{C}_3$)	21,180	12	21,125	5	21,126 [*]	8	21,140 [*]	12
13	$^{1/5}(^{11}\text{B}_5^1\text{H}_9 - ^{32}\text{S}^{16}\text{O}_2)$	31,013	8			31,0224	2,8		
14	($^{11}\text{B}^1\text{H} - ^{12}\text{C}$)	17,136	6			17,1373 [*]	3,2		
15	($^{10}\text{B}^1\text{H} - ^{11}\text{B}$)	11,473	6			11,4608	1,9		
i	Massenüberschuß	$M^*(\text{mME})$	$m^*(\mu\text{ME})$	M (mME)	m (μME)	M (mME)	m (μME)	M (mME)	m (μME)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	($^1\text{H} - 1/16^{16}\text{O}$)	8,1450	1,8	8,1442	0,4	8,1444	0,6	8,1409	1,1
II	($^2\text{D} - 1/8^{16}\text{O}$)	14,7386	2,9	14,7386	0,8	14,7396	1,3		
III	($^4\text{He} - 1/4^{16}\text{O}$)	3,8750	2,1			3,8703	2,6		
IV	($^{10}\text{B} - 5/8^{16}\text{O}$)	16,118	6			16,1267	3,9		
V	($^{11}\text{B} - 11/16^{16}\text{O}$)	12,791	5			12,8102	3,1		
VI	($^{12}\text{C} - 3/4^{16}\text{O}$)	3,8000	3,9	3,8173	1,2	3,8173	1,9	3,8079	3,2
VII	($^{14}\text{N} - 7/8^{16}\text{O}$)	7,5182	3,0	7,5268	1,0	7,5270	1,2		
VIII	($^{32}\text{S} - 2^{16}\text{O}$)	-17,806	20	-17,7613	3,2	-17,7616	2,4	-17,754	6
IX	($^{34}\text{S} - 17/8^{16}\text{O}$)	-20,79	170					-21,324	9

* Kein Meßwert, sondern aus anderen Q -Werten der gleichen Kolonne berechnet.

¹ Sämtliche Werte dieser Kolonne nach einem Ausgleich von A. H. WAPSTRA.

² Ausgeglichen mit Hilfe der Bedingungsgleichung $2 Q_3 - Q_4 + Q_5 = 0$.

³ Gewichtete Mittelwerte der in der Veröffentlichung angegebenen Beobachtungsreihen.

Tab. 6. Vergleich von neueren massenspektroskopischen Dublettmessungen $Q \pm q$ und der daraus berechneten Massen $M \pm m$ mit den entsprechenden Werten $Q^* \pm q^*$ und $M^* \pm m^*$ aus dem Ausgleich kernphysikalischer Daten.

$(M - M^*)/A$ hat den abnorm hohen Wert $-14,49 \pm 0,24$ keV. Wie Abb. 1 zeigt, liegt ^{34}S am Ende einer kleinen Kette und ist nur mit ^{33}S durch die Reaktionen $^{33}\text{S}(\text{d}, \text{p})$ ^{34}S und $^{34}\text{S}(\gamma, \text{n})$ ^{33}S verbunden. Ihre Q -Werte, auf die sich unsere Masse $^{34}\text{S}^*$ stützt, sind mit Fehlern von 250 und 200 keV angegeben und treten (s. Tab. 3) im Zyklus 123 mit $l_q = 0,15$ auf, m. a. W. die Summe der beiden Q -Werte stimmt weit innerhalb der Fehler mit dem Wert von $-E_d$ aus Tab. 2 überein. Der massenspektrographische Wert von EWALD et al. verlangt nun bei beiden Reaktionen Q -Werte, deren Absolutbeträge um 500 keV größer sind, d. h. daß beim Prozeß $^{33}\text{S}(\text{d}, \text{p})$ nicht der Grundzustand sondern ein um 500 keV höher liegendes Niveau von ^{34}S erreicht und daß der Schwellenwert von $^{34}\text{S}(\gamma, \text{n})$ zufällig um etwa den gleichen Betrag zu niedrig gemessen worden war. Dafür sprechen auch, wie WAPSTRA⁸ bereits ausführlich gezeigt hat, alle übrigen bisher vorliegenden massenspektrographischen und Mikrowellen-Messungen sowie einige ohne Fehlerangaben gemachten kernphysikalischen Daten. Glücklicherweise kann die Streichung von $^{34}\text{S}^*$ aus dem System unserer Massen keinen merklichen Einfluß auf die Matrix (a_{ik}^{-1}) und somit auf die Ergebnisse unseres Ausgleichs haben. Denn ^{34}S ist nur mit ^{33}S durch zwei Q -Werte von vernachlässigbar kleinem Gewicht verbunden, und keine andere Masse stützt sich darauf.

Der Vergleich von Packungsanteilen bringt es mit sich, daß die Diskrepanzen $(M - M^*)/A$ bei dem in Abb. 4 in der Mitte liegendem Standard ^{16}O per def. verschwinden müssen. Um aber aus massenspektrographischen Daten auch Bindungsenergien zu berechnen, muß man irgend eine Annahme über die Masse des Neutrons machen. Dazu bieten sich zwei Möglichkeiten an. 1. Wir übernehmen aus dem Ausgleich die Neutron-Proton-Differenz

$$({}^1\text{n}^* - {}^1\text{H}^*) = 0,7815 \pm 0.9$$

(hier wie im folgenden sind die Größen in MeV und die Fehler in keV angegeben), d. h. wir legen das Hauptgewicht auf die Q_β -Werte. Damit und aus

den gewichteten Mittelwerten für ${}^1\text{H}$ und ${}^2\text{D}$ von NIER et al. und von SMITH wird

$$({}^1\text{n} + {}^1\text{H}) = 15,9487 \pm 1.1, \quad {}^1\text{n} = 8,3651 \pm 1.0$$

$$\text{und} \quad E_d = 2,2244 \pm 1.2.$$

2. Wir lassen die ausgeglichene Bindungsenergie des Deuterons $E_d^* = 2,2262 \pm 1.3$ ungeändert, was etwa bedeutet, daß wir den Q_r -Werten den Vorzug geben. Damit wird $({}^1\text{n} - {}^1\text{H}) = 0,7832 \pm 1.3$, $({}^1\text{n} + {}^1\text{H}) = 15,9505 \pm 1.4$ (praktisch in Übereinstimmung mit dem Wert aus dem Ausgleich $({}^1\text{n}^* + {}^1\text{H}^*) = 15,9502 \pm 3.2$) und ${}^1\text{n} = 8,3668 \pm 1.3$. Mit diesen Werten und den massenspektroskopischen Massen aus Tab. 6 wurden nach den Gln. (1) bzw. (2) die Bindungsenergien pro Nukleon E/A berechnet und ihre Differenzen $(E - E^*)/A$ zu den Werten des Ausgleichs in Abb. 5 eingetragen, und zwar beziehen sich die durch Ringe gekennzeichneten Punkte mit den zugehörigen abgegrenzten Strecken auf die Annahme 1. und die durch Kreuze markierten Punkte mit den durch Pfeilspitzen begrenzten Strecken auf die Annahme 2. Hier scheinen zwar die Diskrepanzen lange nicht mehr so ausgeprägt zu sein wie in Abb. 4, doch wurde die etwas trügerische Übereinstimmung mit Annahmen erkauft, die von den gesamten kernphysikalischen Daten und somit auch von den Werten E^* mehr oder weniger kleine Änderungen verlangen.

Anm. b. d. Korr.: Durch die Freundlichkeit von Professor NIER erhielten wir Kenntnis von 2 Arbeiten¹⁶, in denen mit wenigen Ausnahmen die Massen sämtlicher stabiler Nuklide im Bereich von ${}^1\text{H}$ bis ${}^{32}\text{S}$ massenspektrographisch gemessen wurden. Die Abweichungen dieser Massenwerte von den Werten unseres Ausgleichs sind in Abb. 4a eingetragen, die sonst der Abb. 4 völlig analog ist. An der Diskrepanz zwischen Massenwerten aus massenspektrographischen Dubletts und aus kernphysikalischen Daten läßt sich nun nicht mehr zweifeln. Die Abweichungen sind im großen und ganzen proportional der Massenzahl A ; doch überlagern sich dieser Proportionalität bei einzelnen Massen individuell verschieden große Beträge.

¹⁶ K. S. QUISENBERY, T. T. SCOLMAN u. A. O. NIER, Phys. Rev., im Druck. — T. T. SCOLMAN, K. S. QUISENBERY u. A. O. NIER, Phys. Rev., im Druck.